

Insegnamento: IDRAULICA I

Docente: prof. M. MORGANTI

PROGRAMMA SVOLTO NELL'A.A. 2005-2006

Testo di riferimento: E. Marchi, A. Rubatta, *Meccanica dei Fluidi: principi e applicazioni idrauliche*, Ed. UTET.
(nel seguito vengono indicati tra parentesi i paragrafi del testo trattati nel programma del corso).

=====

Modello del continuo fluido (2.1, 2.2, 2.3, 2.9, 4.5, 4.6)

Modello del continuo nella meccanica dei fluidi. Proprietà dei continui fluidi: densità, comprimibilità, viscosità, tensione superficiale. Schematizzazione delle forze di massa e di contatto. Tensore degli sforzi.

Cinematica (4.1, 4.2, 5.2, 5.3, 5.9, 10.1, 10.2)

Rappresentazione lagrangiana ed euleriana. Campo del vettore velocità e sue rappresentazioni; portata di massa e volumetrica. Vettore accelerazione; accelerazione locale e convettiva, potenziale dell'accelerazione. Derivata materiale. Teorema del trasporto di Reynolds (enunciati). Moto vario, permanente e uniforme. Moto laminare e turbolento.

Equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi (4.3, 4.4, 4.5, 4.7, 11.1)

Principio di conservazione della massa: equazione di continuità in forma indefinita e globale; equazione di continuità per le correnti fluide stazionarie. Principio di bilancio della quantità di moto: equazione indefinita e globale del moto.

Fluidostatica (6.1, 6.4, 6.5, 6.6)

Equazione di equilibrio fluidostatico in forma indefinita e globale. Legge di distribuzione delle pressioni in un mezzo liquido omogeneo e incomprimibile; piano dei carichi idrostatici, quota piezometrica. Piezometri e manometri a fluido. Spinta idrostatica su superfici piane e curve.

Fluidi ideali (7.1, 7.4, 7.5, 11.3, 11.7, dispensa)

Modello di Eulero e sua applicabilità. Teorema di Bernoulli; carico idraulico totale e potenza di una corrente, linea dei carichi e linea piezometrica.

Applicazioni del modello:

Foronomia velocità di efflusso, bocche a battente e stramazzi; integrale di portata.

Spinte dinamiche metodo integrale di calcolo.

Correnti in pressione (11.5, 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 14.1, 14.3)

Schema monodimensionale per una corrente defluente in condotti.

Moto uniforme. Azione di trascinamento: legge di Darcy-Weisbach; funzione di resistenza e formule di rappresentazione per i diversi regimi di moto, abaco di Moody. Equazione di continuità dei carichi nelle lunghe condotte; problemi di verifica per reti di condotte.

Moto permanente. Fenomeni di moto permanente localizzato; formule di Bordà, perdite di carico localizzate.

Correnti a superficie libera (17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.6, 17.7, 17.9, 17.13)

Schema monodimensionale per una corrente a superficie libera.

Moto uniforme. Legge di Darcy-Weisbach e relazione di Chezy, funzione di resistenza e parametro di Chezy: loro relazioni rappresentative, confronto critico. Scale dei deflussi per alvei di forma aperta, chiusa e composta.

Moto permanente. Classificazione delle correnti lineari; alvei a forte e a debole pendenza.

Moti di filtrazione (dispensa)

Mezzi filtranti, permeabilità e curva granulometrica. Equazione di Darcy. Falde artesiane e freatiche. Schematizzazione bidimensionale dei pozzi e delle trincee filtranti.

1. INTRODUZIONE ALL'IDRAULICA
2. RICHIAMI MATEMATICI
3. CONV. SOMMATORIA IMPLICITA / OPERATORE DI KRONECKER - PERMUTAZIONE
4. GRANDEZZA SCALARE - VETTORE / PRODOTTO SCALARE - VETTORIALE - TENSORE
5. GRANDEZZA TENSORE / PRODOTTO MISTO / TRACCA DEL TENSORE / TENSORI SIMMETRICI - EMISIMMETRICI - ISOTROPICI
6. TENSORE IDENTITA' - TRASPOSTO / NABLA / GRADIENTE
7. DIVERGENZA / ROTORE / OP. DI LAPLACE / TEOREMI DI GREEN - GAUSS
8. DENSITA' / MASSA
11. TENSIONE SUPERFICIALE / DEFORMABILITA'
12. RELAZIONE COSTITUTIVA DEI MATERIALI / COMPRIMIBILITA' DEL CORPO / FLUIDI INCOMPRESSIBILI - DEBOLMENTE COMPRIMIBILI
13. FLUIDI COMPRIMIBILI / DEFORMAZIONI DI DISTORSIONE
14. MOTO PIANO DI COUETTE
15. FLUIDI NEWTONIANI / VISCOSITA' DINAMICA - CINEMATICA
16. PRINCIPI ASSIOMATICI DELLA MECCANICA / FORZE DI MASSA - DI CONTATTO
17. PESO SPECIFICO
20. TEOREMA DI CAUCHY
21. TENSORE DEGLI SFORZI / PRESSIONE
22. FLUIDOSTATICA
23. EQUAZIONE DI EQUILIBRIO NELLA FLUIDOSTATICA
24. IDROSTATICA / QUOTA PIEZOMETRICA / PRESSIONE RELATIVA
25. PIANO DEI CARICHI RELATIVI
26. PIANO DEI CARICHI ASSOLUTI / SPINTA IDROSTATICA
27. MOMENTO STATICO DELL'AREA
28. MOMENTO CENTRIFUGO / SPINTA SU SUPERFICI CURVE
31. RIFERIMENTO LAGRANGIANO

32. LINEE DI TRAIETTORIE / LINEE DI EMISSIONE
33. RIFERIMENTO EULERIANO / LINEE DI CORRENTE
34. TUBO DI FLUSSO / PORTATA - VOLUMETRICA - DI MASSA
35. ACCELERAZIONE LOCALE - CONVETTIVA / DERIVATA SOSTANZIALE
36. MOTO VARIO - STAZIONARIO - UNIFORME - UNIFORME ACCELERATO /
ESPERIMENTO DI REYNOLDS / MOTO TURBOLENTO
37. NUMERO DI REYNOLDS
39. TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS
40. EQUAZIONE DI CONTINUITA' / CORRENTE FLUIDA STAZIONARIA
42. EQUAZIONE INDEFINITA BILANCIO Q. DI MOTO

LIBRO: Marini - Turbatta; MECCANICA DEI FLUIDI: PRINCIPI e APPLICAZIONI IDRAULICHE -
Ed. UTET → x gli "esercizi": Defroni, Orsi - PROBLEMI DI IDRULICA E
MECCANICA DEI FLUIDI - Ed. Ambrosiana - Milano

DISPENSE: Solilei

H

Oggetto: studio moto liquidi e interazione con corpi rigidi a contatto.

Un LIQUIDO (in ingegneria) meno e' l'acqua; molte leggi sono
comuni anche ai FLUIDI (es. AERIFORMI); sono corpi materiali [LIQUIDI e
AERIFORMI] con proprietà chimico / fisiche che li distinguono da solidi.
La distinzione e' nella struttura molecolare molto + deformabile; config.
molecolare e' facilmente modificabile. (anche solidi, ma solo applicate
forze di > intensità); quando muoviamo un corpo che sotto certe condi-
zioni - viene alterato, c'è evoluzione dinamica dovuta a interazione tra
proprietà corpo e condizioni. Ci costruiamo modello che abbia bene
risposta ed efficienza.

Fenomeni idraulici dip. da leggi meccanica

classica. [Struttura matematica e' strumento
essenziale, ma solo quando fenomeno e' matematico]

Solilei ha rappresentato le relazioni + alto di comprensione
del fenomeno; mecc. classica si divide in meccanica

dei corpi rigidi e dei corpi deformabili (x corpi
rigidi e' "semplice" studiare il moto); x corpi ad

ex. n. può operare => si tiene conto anche della deformabilità dei
corpi (liquidi fortemente deformabili => quasi mai si studiano
problemi del tipo dei corpi rigidi); n. a. c. def. si divide ulterio-
mente in m. a. c. def. SOLIDI e LIQUIDI; anche qui c'è diverso fenomeno
del problema. Per i SOLIDI c'è un comportamento <=> e complesso;

x liquidi e' + semplice.



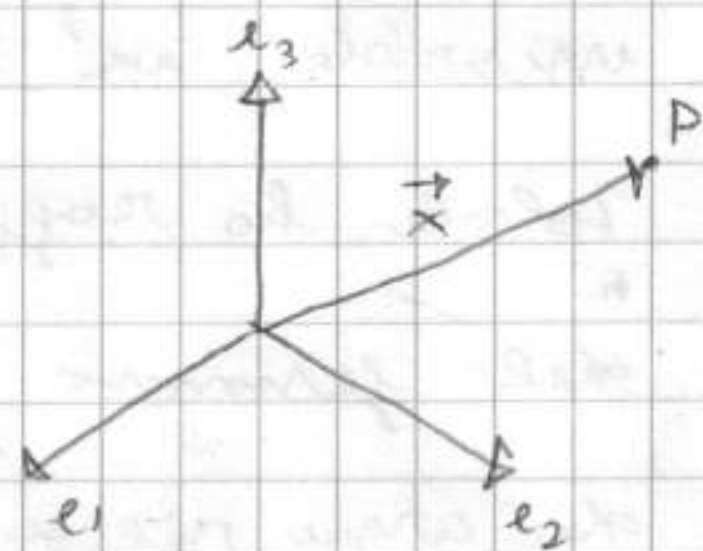
[Notabilmente dall' antichità si sono presentati problemi idraulici complessi]
 svolta con Newton e altri tramite metodo empirico
 Problemi si dividono in IDROSIGMA INTERNA ed ESTERNA; nei primi c'è
 dominio su fluido impenetrabile (ex. moto acqua nel fiume, acqua e
 contenuta dentro altro fluido), nei secondi ampia massa fluida
 confinata (es. mare, dominio molto frenato e costante) il fluido rin-
 getto al corpo è rilevante (interazione delle pareti del dominio
 qui non sono fondamentali)

H

[Richiami necessari] Fenomeni evolvono in spazio 3d. C'è poi
 sequenza evolutiva, fenomeno cambia nel TEMPO. C'è bisogno di
 struttura matematica. Fenomeni meccanici evolvono in spazio EUCLIDEO,
 ma si collocano spaziali definiti da vett. posizione \vec{x} tali che

$$E = \left\{ \vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$
 ogni posizione è definita nei
 reali a 3d. Per particolari
 simmetrie si può semplificare e rappresentare anche in 2d o in 1d,
 dove anche METRICI, cioè QUANTIZZARE le posizioni. \rightarrow si introduce

elementi QUANTITATIVI, BASE di RIFERIMENTO (ex. base CARTESIANA); def.
 base [i.e. da 1 a 3] $\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \right\}$ VERSORI INDIP., si può collocare punto
 generico P che ha come posizione il vettore \vec{x}
 UNIVOCAMENTE definito (x_1, x_2, x_3 sia proiezione
 vettore su base).



Il TEMPO è l'insieme di istanti $t \in$ allo spazio dei reali positivi.

$$T = \left\{ t : t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$
 Su un'opportuna scala temporale siamo
 un valore al tempo che struttura il
 fluire del fenomeno.

Lo spazio del vett. posizione e lo spazio dei tempi verranno e
 ② rappres. le VARIABILI INDIPENDENTI delle variabili dipendenti che

sono le grandezze fisiche che caratterizzano l'evoluzione di quel corpo.

Ex. \vec{v} di particella H_2O è grandezza cinematica e variabile dipendente che - in generale rapp. evoluzione in sp. euclideo e tempo - avrà come variabile INDIP. ma x de + $\left[\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) \right]$

Nella descrizione dell'ev. dinamica del sistema materiale stabiliamo introdurre le GRANDEZZE di CAMPO che sono di 3 tipi: SCALARI (ex tempo, densità, pressione), VETORI (di grado 1, ex. velocità che in \mathbb{R}^3 è definita da 3 scalari), TENSORI (grandezza che in \mathbb{R}^3 è definita da 9 scalari).

- CONVENZIONE DI SUMMATION IMPLICITA (segue da RICCHIAMI MATEMATICI) 31/10/05

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n ; \text{ x comodità ci si sta convenz.}$$

x cui $\rightarrow \equiv a_i b_i$ (se trovo termini con indici ripetuti, la convenz. adottata è la somma di questi termini da 1 a n). Se trovo $a_i b_j$ non vale la conv. (non ci sono indici ripetuti). Se trovo $a_i b_i$ non vale perché b_i avrà un valore fisso di n che moltiplicherà $\sum_{i=1}^n a_i$

- OPERATORE DI KRONECKER (Δ di Kr.) a 2 indici

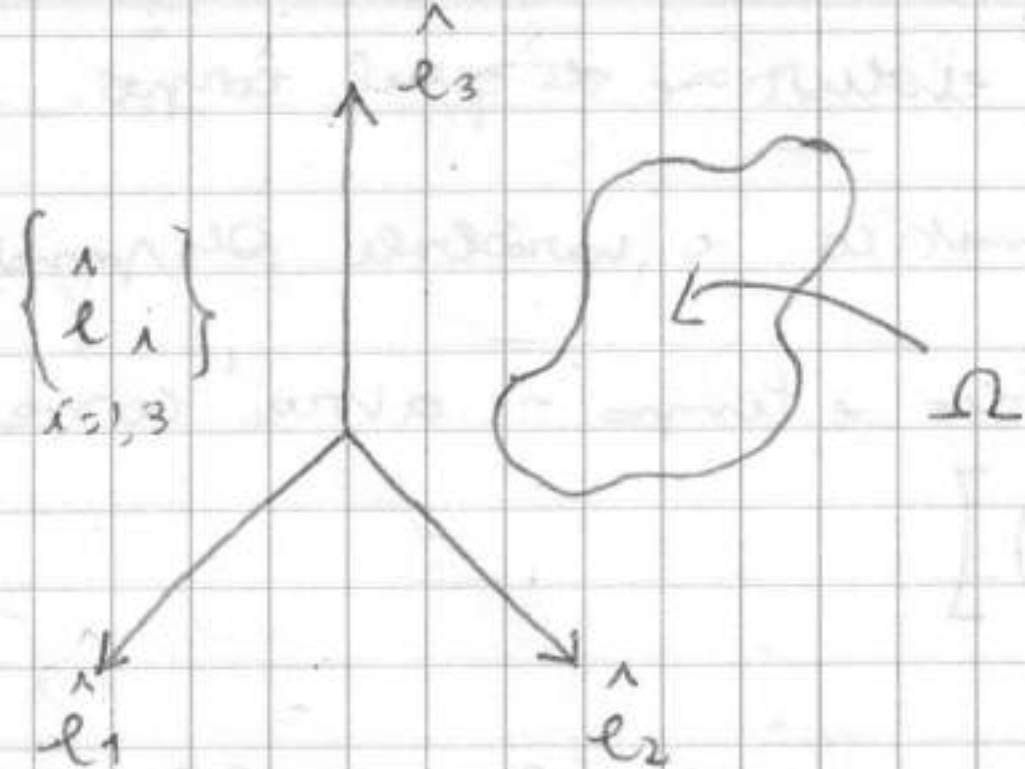
$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{se } i=j \\ = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{Ex. } \sum_{i,j=1}^n a_i b_j ; \text{ se trovo } \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

- OPERATORE DI PERMUTAZIONE (oper. a 3 indici)

$$\epsilon_{ijk} \begin{cases} = 1 & \text{per permutazioni cicliche degli indici: } 1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{1} 2 \\ [123, 231, 312] \\ = -1 & \text{per permutazioni antiorarie degli indici: } 1 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 1 \\ [321, 213, 132] \\ = 0 & \text{per permutazioni con ripetizioni degli indici } [121, \dots] \end{cases}$$

H

Consideriamo sistema materiale definito nello spazio euclideo. (3)



in un certo dominio Ω [ex. su \mathbb{R}^3 o in n INTERI], in q.e. i confini non contano
 quindi $\Omega \equiv$ con intero nullo.
 $\forall \vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
 $\forall t \in I \subseteq \mathbb{R}^+$

esplicitiamo grandezze fisiche + derivare il sistema.

- **GRANDEZZA SCALARE** (n. minuscolo). Conoscere la gr. scal. $\forall \vec{x} \in t$
 $S = S(\vec{x}, t)$ del sistema conoscere il valore esatto (es. ex la pressione a ogni punto)

- **GRANDEZZA VETTORE** (lettore maiuscolo con freccia). Si "quantifica" tramite
 $\vec{A}(\vec{x}, t) \equiv a_i \hat{e}_i$ il valore componenti vettore rispetto alla base
 [una conv. non implicata] $a_1 \hat{e}_1 + \dots$; a_i le componenti del vettore,
 sono **SCALARI** e sono $a_i(\vec{x}, t)$

Nel caso dei VETTORI si possono trovare \leftrightarrow tipi di interazione su vettore, i prodotti
 [ex. se il prodotto algebrico, sostituisce "o" della moltiplicazione]

> $S \vec{A}$ (e' un prodotto algebrico) $= (S a_i \hat{e}_i)$

> **PRODOTTO SCALARE** (prodotto tra vettori che produce scalare) \rightarrow in int. CARTESIANO

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv a_i b_i \quad \rightarrow \text{conv. numerica (somma prodotti componenti omologhe)}$$

> **PRODOTTO VETTORIALE** (prodotto tra vettori che produce vettore)

$$\vec{A} \times \vec{B} \equiv a_i b_j \hat{e}_k \in_{i,j,k}$$

Tramite operazione permutazione e
 compatta la definizione

> **PRODOTTO TENSORE** (prodotto tra due vettori che produce 1 tensore)

$$\vec{A} \otimes \vec{B} \equiv \vec{A} \vec{B}$$

(senza minuscolo; fra 2 vettori e' IMPOSSIBILE
 effettuare un prodotto algebrico, quindi

in questo caso non c'era confusione)

Il tensore risultante ha 9 componenti definite come $a_i b_j$
 (\rightarrow)

- GRANDEZZA TENSORE (del 2° ordine)

$$\underline{B}(\vec{x}, t) \equiv b_{ij} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ex. } a_i b_j$$

[in grandezze]

> PRODOTTO MISTO (tra un vettore e un tensore che produce un vettore)

$$\vec{A} \cdot \underline{B} \equiv a_i b_{ij} \hat{e}_j \equiv \underline{P}$$

Tensore è operatore lineare (commutabile): produce nuova grandezza di campo

$$\vec{A} \xrightarrow{\underline{B}} \vec{P} \quad \text{lineare}$$

Se si applica il prodotto a tutte le Vettori

$$\hat{e}_1 \cdot \underline{B} = b_{11} \hat{e}_1 + b_{12} \hat{e}_2 + b_{13} \hat{e}_3 \equiv \vec{B}_1$$

$$\hat{e}_2 \cdot \underline{B} = b_{21} \hat{e}_1 + b_{22} \hat{e}_2 + b_{23} \hat{e}_3 \equiv \vec{B}_2$$

$$\hat{e}_3 \cdot \underline{B} = b_{31} \hat{e}_1 + b_{32} \hat{e}_2 + b_{33} \hat{e}_3 \equiv \vec{B}_3$$

Il tensore del 2° ordine è definito tramite 3 vettori

• Dato un certo tensore \underline{B} si definisce la TRACIA DEL TENSORE come

la somma dei termini sulla diagonale principale del tensore

$$\text{tr } \underline{B} \equiv b_{ii} \quad \text{Utile che costituisce 1 dei 3 INVARIANTI del t. del 2° ordine}$$

Ex. vettore velocità con 3 componenti; se rappresentato in altra base ha componenti <>, ma vettore è lo stesso; c'è proprietà che rimane invariata, il MODULO.

Per il tensore vale la stessa logica e ne hanno 3, di cui una è la TRACIA.

• TENSORI SIMMETRICI: \underline{B} è SIMMETRICO se $b_{ij} = b_{ji}$

• TENSORI ANTI-SIMMETRICI: \underline{B} è ANTI-SIMMETRICO se $b_{ij} = -b_{ji}$

• TENSORI ISOTROPICI: $\underline{B} \equiv b_{ij} \equiv \delta_{ij} b = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

• TENSORE IDENTITÀ: $\underline{I} \equiv \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ un tensore isotropo \underline{B} e' anche scrivibile come $\underline{B} \equiv b \underline{I}$

• Dato un tensore \underline{B} si definisce il TENSORE TRASPOSTO \underline{B}^T
 $\underline{B}^T \equiv b_{ij}^T = b_{ji}$

(richiami)

7/10/2025

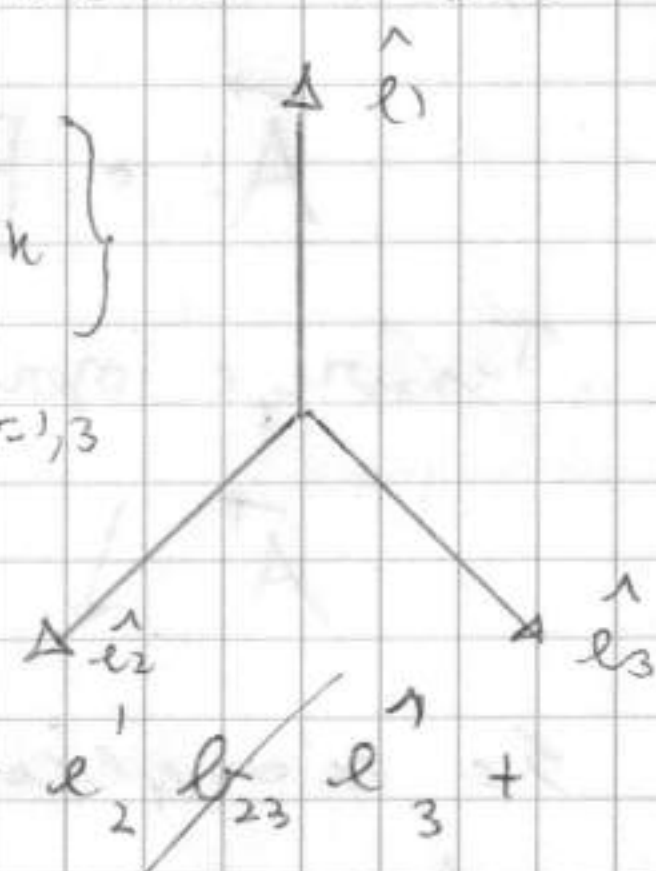
prodotto misto $\vec{A} \cdot \underline{B} \equiv a_i b_{ij} \hat{e}_j = \vec{P}$ (Tensore e' combinazione di 3

vettore come vettore e' combinazione di 3 scalari)

\rightarrow con vettore base cartesiana: $\hat{e}^{(1)} \cdot \underline{B} \equiv \underline{b'_{1j}}$

$$+ \underline{b'_{2j}} + \underline{b'_{3j}} \quad [j=1, 2, 3]$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned} & \underline{b'_{1j}} + \underline{b'_{2j}} + \underline{b'_{3j}} \Rightarrow b_{11} \hat{e}_1 + b_{12} \hat{e}_2 + b_{13} \hat{e}_3 = \underline{B} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \equiv \underline{B}$$

Si può pensare ad un prodotto riga x colonna tra $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e \underline{B}

[OPERATORI DIFFERENZIALI]

Mettiamo in gioco in varie forme le derivate delle grandezze di campo rispetto alle posizioni spaziali.

OPERATORE VETTORIALE NABLA ("vettore virtuale" rispetto ad una base in \mathbb{R}^3)

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \quad \text{E' un vettore "simbolico"}$$

• OPERATORE GRADIENTE (applicabile anche a tensori dell' n-esime)

- di uno SCALARE:

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \hat{e}_i \quad (\text{da scalare a vettore})$$

- di un VETTORE: (simile a grad. tensoriale)

$$\text{grad } \vec{A} \equiv \nabla \vec{A} \equiv \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad (\text{da vettore a tensore})$$

(6)

(\rightarrow)

Gradiente produce grandezza di campo di ordine superiore al grado del campo a cui è applicato.

• OPERATORE DIVERGENZA

- di un TENSORE \underline{I}

$$\text{div } \underline{I} \equiv \nabla \cdot \underline{I} \equiv \frac{\partial I_{ij}}{\partial x_i} \hat{e}_j \quad (\text{da tensore a vettore})$$

- di un VETTORE \vec{A}

$$\text{div } \vec{A} \equiv \nabla \cdot \vec{A} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad (\text{da vettore a scalare})$$

Operatore divergenza invece fa SCENDERE la grandezza del campo a cui è applicato

• OPERATORE ROTORE (esclusivo x vettori)

$$\text{rot } \vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A} \equiv \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

Proprietà operatori differenziali:

$$1) \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad [\text{prodotto vettore tra vettori } \parallel \text{ è nullo}]$$

$$2) \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad [\text{prodotto scalare tra vettori } \perp \text{ è nullo}]$$

$$3) \nabla \cdot (b \underline{I}) \underset{\text{tensore isotropo}}{=} \nabla \cdot b \quad ; \quad \frac{\partial \sum_{ij} b}{\partial x_i} \hat{e}_j \underset{\text{contrasse gli indici}}{=} \frac{\partial b}{\partial x_i} \hat{e}_i$$

$$\left[\begin{aligned} \nabla \cdot (b \vec{A}) &= b \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla b \quad ; \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \underbrace{\nabla \cdot \nabla \vec{A}}_{\nabla^2 \vec{A}} \\ \nabla \cdot (a \underline{B}) &= a \nabla \cdot \underline{B} + \nabla a \cdot \underline{B} \quad ; \end{aligned} \right]$$

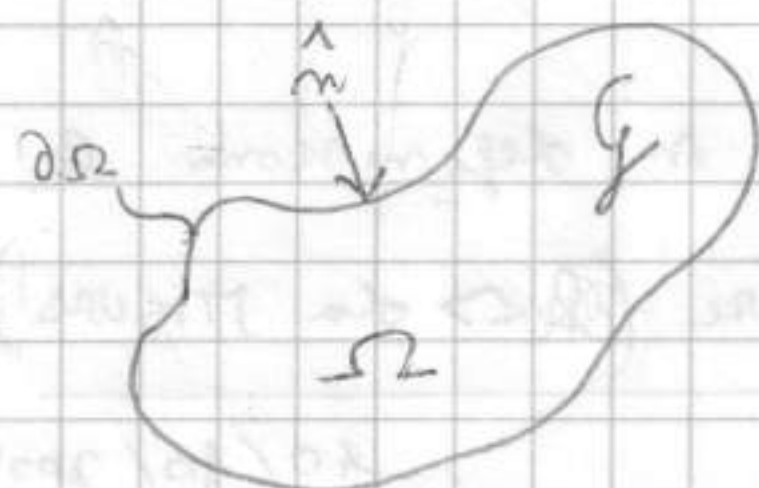
$$[\text{OPERATORE DI LAPLACE: } \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \nabla^2]$$

H

TEOREMA di GREEN-GAUSS (o stella DIVERGENZA)

Dato un dominio in \mathbb{R}^3 che ha come limite una frontiera chiusa; su questa

è definita una grandezza di campo \vec{G} si ha:



$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{G} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \vec{G} \cdot \hat{n} d(\partial\Omega) \quad \left[\begin{array}{l} \text{normale alla frontiera verso interno} \\ \text{flusso di } \vec{G} \\ \text{int. nella frontiera} \end{array} \right]$$

[quello errore in vettore o tensore di ordine superiore a 0]

(in meccanica dei fluidi conviene con \hat{n} entrante)

In idraulica prima questione è come rappresentare quantità di materiale, il suo "contenuto". Come distribuire la

posizione di materia in Ω ? In realtà molecolare materia non occupa tutto lo spazio; mi sto un modello, un

ASSIOMA (materia scelta concettuale, postulato).

Assumo come schema di rappresentazione una distribuzione continua della materia nel dominio (\nexists punti vuoti o con concentrazioni ∞ di materia).

Schema valido in meccanica classica. Materia è rapp. con SCHEMA DEL CONTINUO.

(\Rightarrow distribuita con continuità; \nexists lacune e ∞ conc. di mat.), MA NON PUÒ DIRE

che la materia è UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA! Può accadere di avere \leftrightarrow concentra-

zione, solo i "limiti" sono esclusi. In \mathbb{R}^3 in ogni punto c'è una q. di materia $\frac{1}{\infty}$, particella di materia, p.to definito da vett. \vec{x} . Δ ogni p.to geometrico \equiv

p.to materiale con una posizione univocamente definita da \vec{x} .

Ogni grandezza di campo è rapp. all'interno del dominio da $f(x)$ continua con derivata di ordine n (grande a piacere) continua.

[PROPRIETÀ FISSATE DEI CORPI]: q. di materia in Ω ha $m \leftrightarrow$ a seconda delle condizioni. Massa matematicamente definibile tramite DENSITÀ (DENSITÀ):

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \lim_{\Delta\Omega \rightarrow P} \frac{\Delta m}{\Delta\Omega}$$

Preso un volume $\Delta\Omega$ contenente

molteplicità Δm di massa e perciò il

limite di questo rapporto per Ω che tende ad un punto P

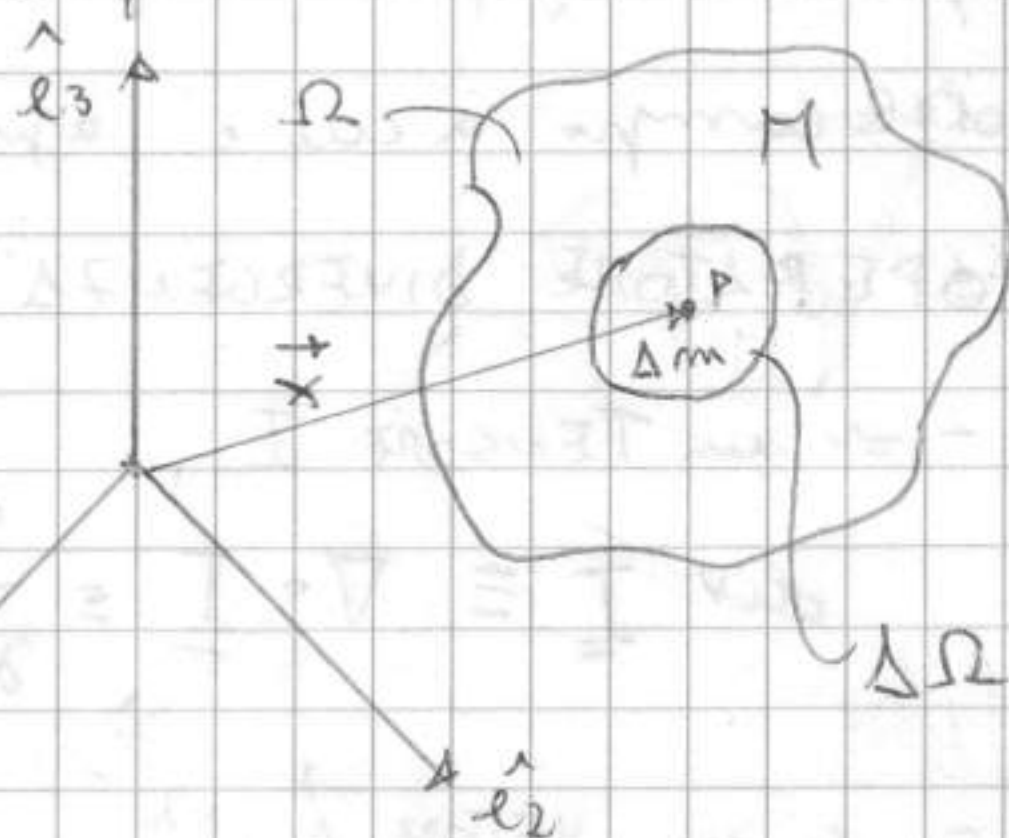
Per lo schema del continuo adottato, dominio Ω con volume finito V_{Ω} .

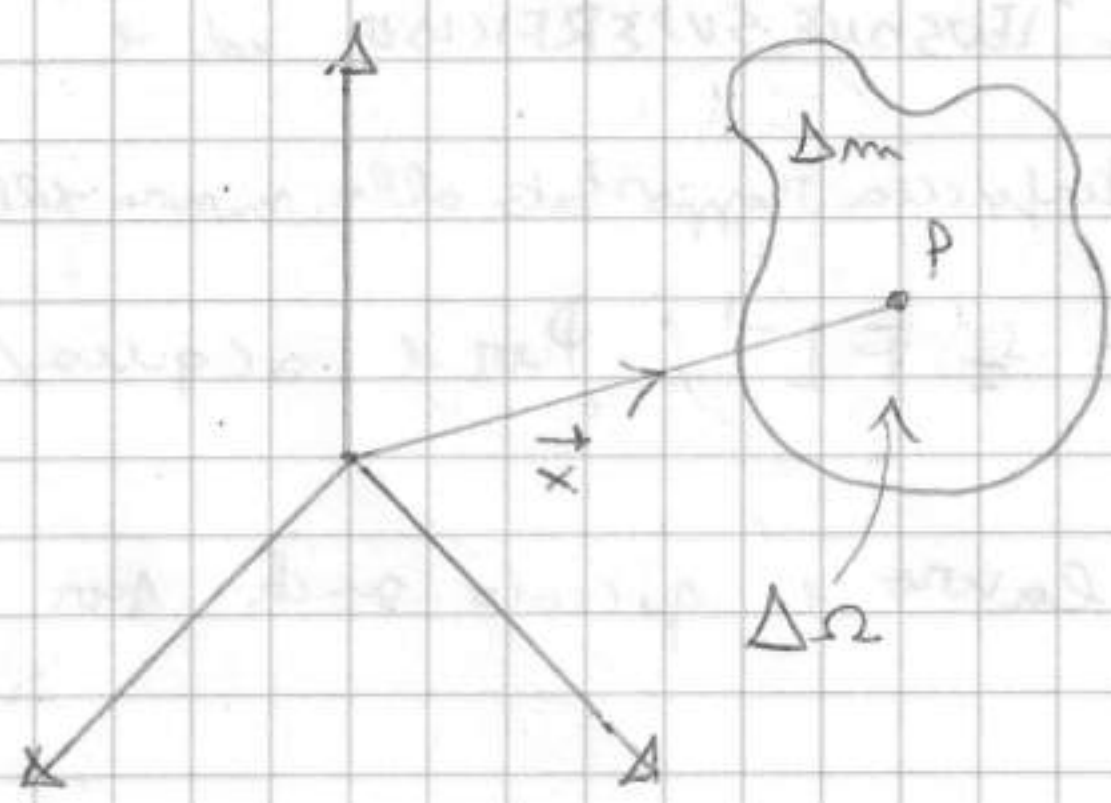
ha rappresentazione delle DENSITÀ contenute nel dominio e

$$M = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \quad [\text{integrale della densità nel dominio}].$$

Ogni volta che si incontra grandezza e la si definisce, si definiscono le DIMENSIONI FISICHE; proprietà qualitative delle grandezze (\leftrightarrow da MISURE)

10/10/2005





$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow P} \frac{\Delta m}{\Delta\Omega}$$

Le dimensioni di ρ sono riferite alla massa e al volume: (preferiamo in termini di forze)

$$[\rho] = \frac{M}{L^3} = \frac{\frac{F}{L T^{-2}}}{L^3} = F L^{-6} T^2$$

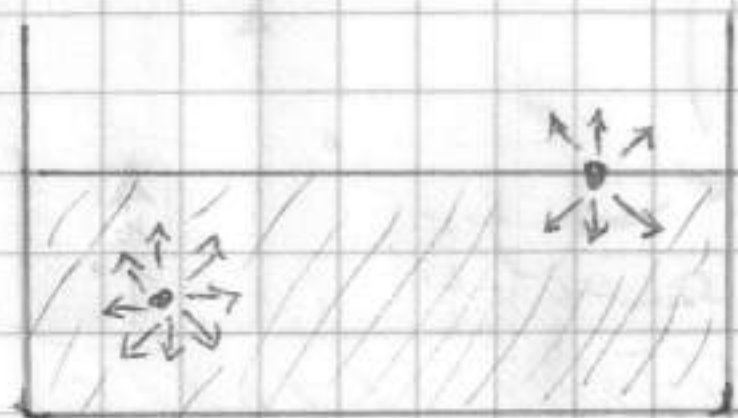
Si devono introdurre unità di misura x dare indicazione QUANTITATIVA.

Dipende oltre che dal materiale anche dalle condizioni termodinamiche del sistema (o TEMPERATURA).

Per l'acqua, a $t = 0^\circ C$ si ha che $\rho = 101,9 \text{ kg m}^{-3} \text{ sec}^2$, invece a $t = 100^\circ C$ si ha che $\rho = 99,7 \text{ kg m}^{-3} \text{ sec}^2$. In un $\Delta t = 100^\circ C$, la variazione di ρ è $\approx 4\% \Rightarrow$ trascurabile [questa variazione \sim in idraulica anche meno che in generale possiamo considerare questi casi a $t = \text{costante}$].

H

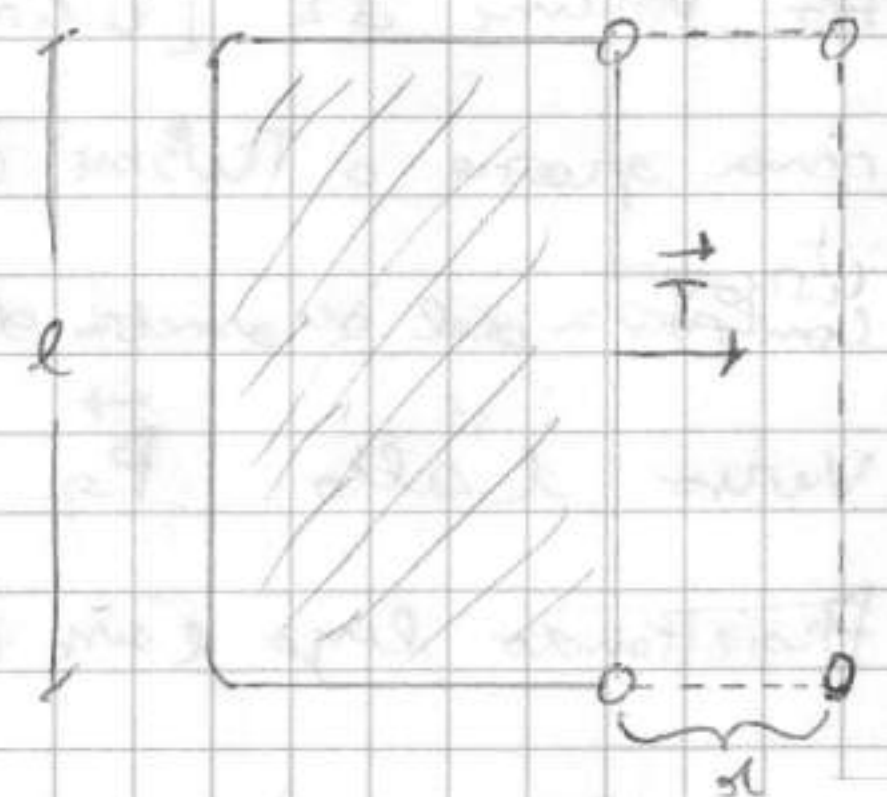
TENSIONE SUPERFICIALE \rightarrow nasce quando [superficie di separazione tra sistemi].



Ex. Acqua e aria; a livello molecolare f. di contatto sono in equilibrio simmetrico se intorno la particella della stessa natura; in superficie, invece, pur essendo in equilibrio, scambiano forze con mol. di natura diversa. Deve esserci una

qualche [Em.] energia aggiuntiva, una TENSIONE, che equilibra le diverse forze.

Si è fatto esperimento: struttura con liquido con 2 strati molecolari in eq. "anomalo". Ogni volta che molecola passa in sup. deve fornire una E tale da tenerla ferma \Rightarrow se aumento superficie compio un lavoro. Lato mobile [con attriti trascurabili] al quale applico forza $[T]$ x spostamento \rightarrow lavoro. Poi si è visto verificato che è stato necessario certo lavoro.



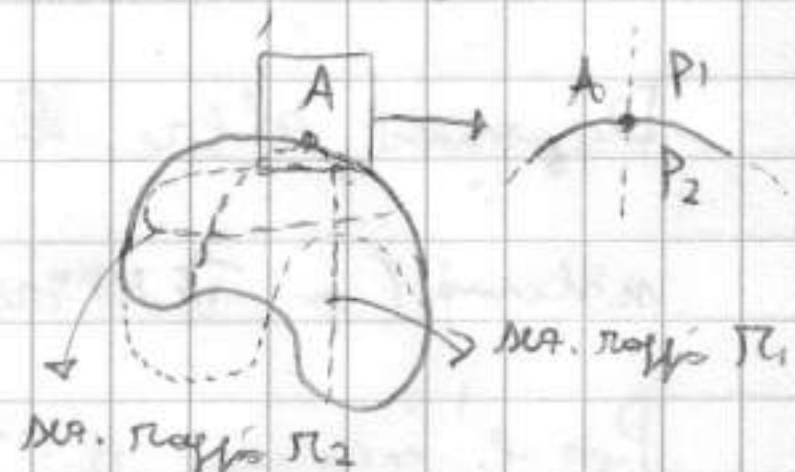
È stato visto che lo spostamento si porta ad un lavoro $l d = T d l =$
 $= 2 l d$ [dimensione area che aumenta] \cdot [fattore di scala interazione dei] (3)

due materiali] $\sigma = \sigma_s$; σ è chiamata TENSIONE SUPERFICIALE ed è definita come il lavoro necessario per aumentare l'interfaccia rapportato alla misura dello s .
 $\sigma = \frac{L \cdot s}{s}$; le dimensioni sono $[\sigma] = \frac{F \cdot L}{L^2} = F L^{-1}$. Per l'acqua/aria $\sigma = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$. Entità di lavoro è piccolo anche per grandi superfici \Rightarrow TRASCURABILE.

Alcuni fenomeni che - se non si considera lo σ - sono intuibili ex bello gli vapori; se la pinta della ESPLODE ($p_{\text{int}} > p_{\text{ext}}$)

Cont. superficie con certa curvatura tra 2 sistemi

materiali $\langle \rangle$ \forall punto A $\exists \Delta p$ / $P_2 > P_1$. Questo



equilibrio \exists μ c'è TENSIONE che agisce in ogni punto del contorno della sup.

Dall'esper. σ è F per unità di lung. che agisce al contorno della sup.

d'interfaccia. [si arriva alla RELAZIONE DI LAPLACE $\Delta p = (P_2 - P_1) = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

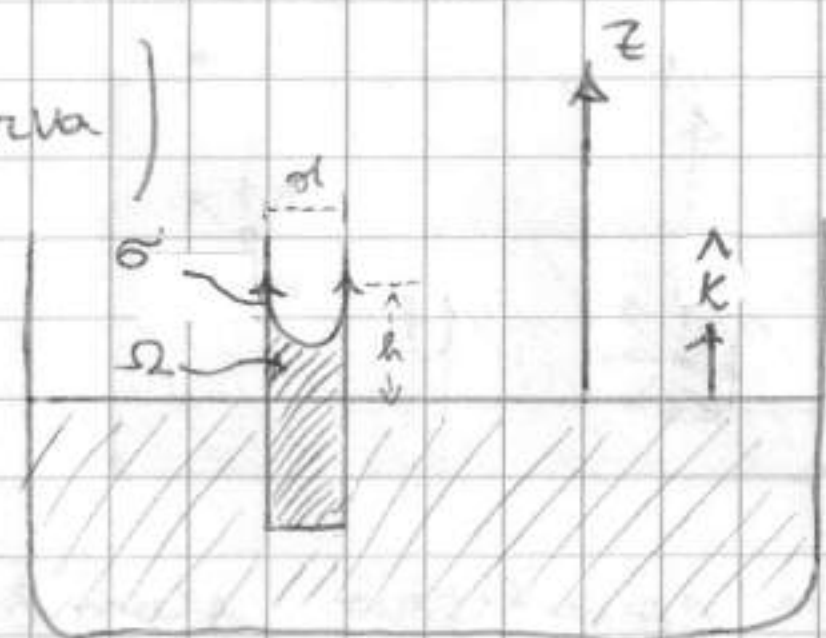
dove R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura locali di questa superficie per cui

a due piani \perp \forall punto P.

$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ è proprietà INVARIANTE della superficie curva



Immerso tubo del diametro $[d]$ molto piccolo, in questo c'è q. d'acqua che RISALE [se c'è vetro sup di contatto \perp a pareti] (RISALTA CAPILLARE).



Ho volume Ω [cilindretto d'acqua] con certo peso $[P_2]$ che lo porterebbe giù, ma grazie a TENSIONE σ ciò non avviene; l'azione della tenr. integrata sulla

circonferenza del diametro d è \vec{F}_σ . Si ha che $\vec{P}_2 + \vec{F}_\sigma = 0$. Cont. z orientato verso l'alto. $\vec{P}_2 = -\rho g \Omega \hat{n}$; $\vec{F}_\sigma = \sigma \ell \hat{n}$. La somma è 0.

Proiettando lungo l'asse z : $-\rho g \frac{d^2}{4} \pi h + \sigma \pi d = 0 \rightarrow \frac{4\sigma}{\rho g} = \frac{d^2 h \pi}{\pi d} = d h =$

$= \frac{4 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}}{10^3} \text{ m}^2 = 30 \text{ mm}^2$, nel caso di interfaccia acqua/aria e

con il tubo di vetro si ha una risalita di 30 mm^2 [si vede con tubi

molto piccoli a causa di una σ piccola].

Un liquido poggiato su un solido con [1]
a contatto l'aria porta a 2 situazioni:

- Liquido che non bagna il solido [1], quando

tan. tra linea sup. con aria / og. / sol. $[\theta \text{ tra piano sol. e tan}]$ e ho $\theta > \frac{\pi}{2}$

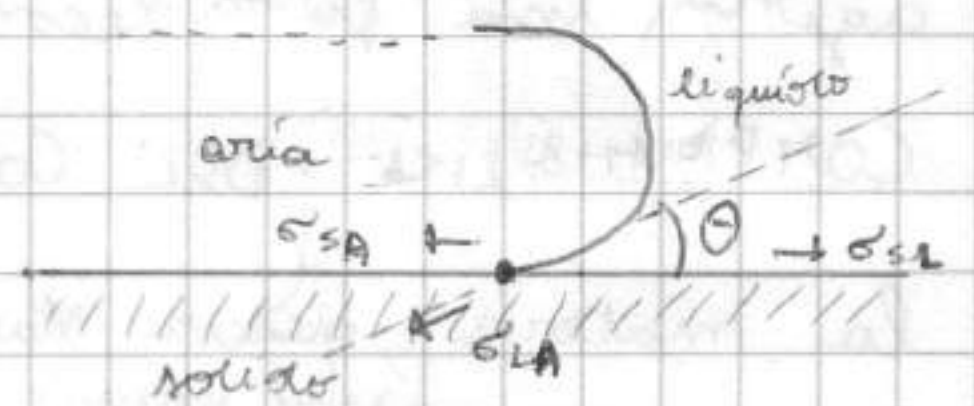
Ex: MERCURIO



- Liquido che bagna il solido [2] nel caso gli

$\theta < \frac{\pi}{2}$, ex: ACQUA, il liquido è wettable e liq.

e acqua $\theta \approx 0^\circ \Rightarrow$ BONA COMPATIBILITÀ



L'equilibrio nei punti di contatto è dato da σ_{SL} , σ_{SA} , σ_{LA} . la relazione

generale è $\sigma_{SA} - \sigma_{SL} = \sigma_{LA} \cos \theta$. Ne consegue che si ha [1] se $\sigma_{SA} < \sigma_{SL}$

e [2] se $\sigma_{SA} > \sigma_{SL}$

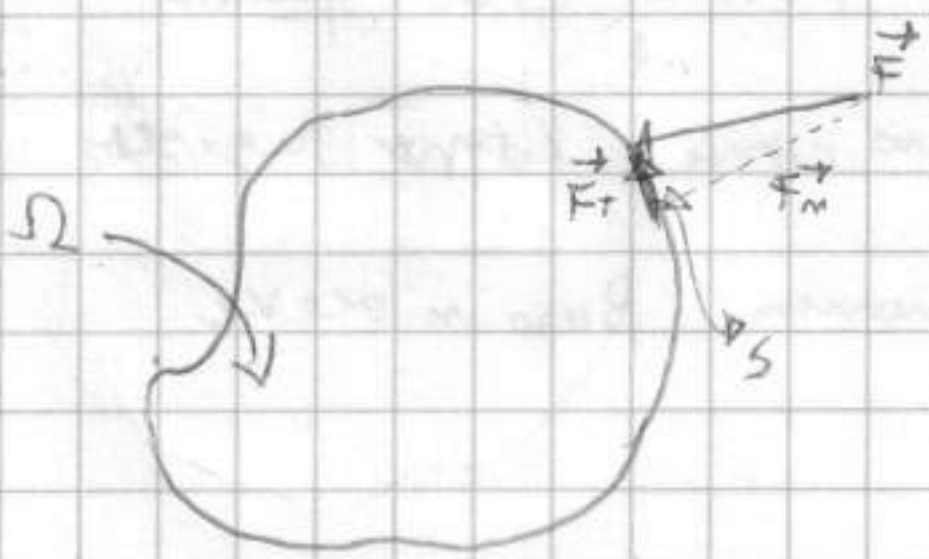
H

DEFORMABILITÀ

Un corpo materiale, sotto azione di F esterne, può registrare una
variazione della sua config. spaziale. Per alcuni corpi le $f.$ in gioco
devono essere elevate [CORPI RIGIDI] (ex. gomma), i fluidi, aeriformi sono
FACILMENTE DEFORMABILI anche con F molto piccole.

Fluidi si deformano sotto effetto di VELOCITÀ della variazione spaziale.

Solidi necessitano di F esterne a modificare la loro configurazione spaziale
[ex. CUBO di gomma]; ai FLUIDI invece solo applicare delle forze a registrare
una VELOCITÀ di deformazione che per essere mantenuta non solo applicare
ulteriore forza (nei solidi se lascio F torna al proprio stato)



Ex. fluido in certa dominio Ω , supponiamo che
agiscano delle forze F in porzione S di separazione
tra Ω e mondo esterno. F si può decomporre
in 2 parti: F_n (\perp a S) e F_t (tangenziale).

$|F_n| = \int_S p \, d\sigma$ dove p è la SFORZA NORMALE dove $[p] = \frac{F}{L^2}$,
[PRESSIONE: F normale
di superficie]

$|F_t| = \int_S t \, d\sigma$ dove t è lo SFORZO TANGENZIALE dove $[t] = \frac{F}{L^2}$

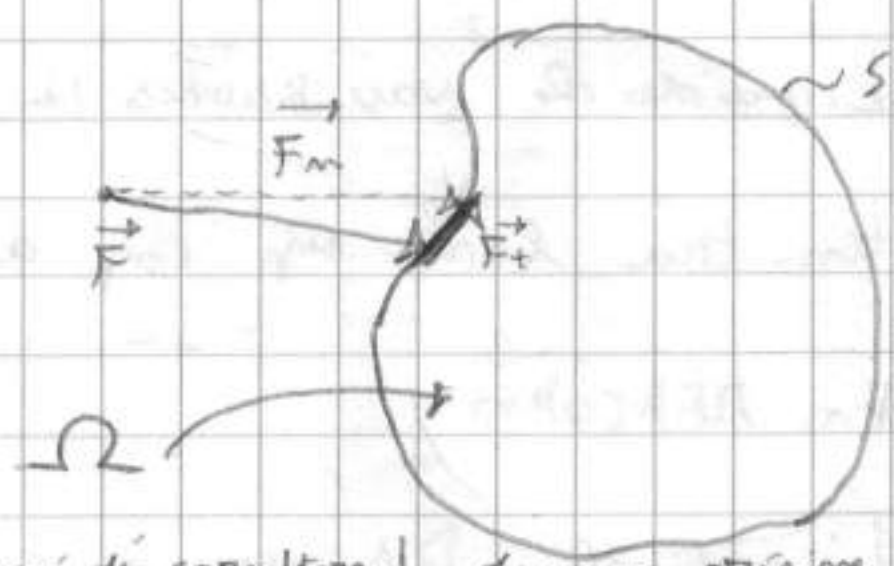
(11)

Lege la deformazione di un sistema alle azioni in esso esercitate. Non è nota per tutti i materiali, x l'acqua si.

Pensiamo un dominio Ω con c.c. fluido.

Supponiamo che attraverso porzione di $\partial\Omega$

agisca una forza decomponibile in \vec{F}_n e \vec{F}_t , angoli azioni di carattere \perp danno origine a $\rightarrow V$ occupato da unità di massa
 COMPRESSIBILITÀ DEL CORPO, Se ho azione \perp al VOLUME SPECIFICO che contiene



la materia, questa massa dentro a V piccolo (ne c'è dilatazione e opacità)

$U_{SP} = \int_{T, \text{coor. costante}}^{\vec{F}_n \text{ NORMALE E SECONDA DI PRESSIONE}} (P)_{T=K}$ si introduce il COEFFICIENTE DI COMPRESSIBILITÀ CUBICA
 [esclusione T , coor. costante].

indicato con β ed è definito con: $\beta = - \left(\frac{\partial U_{SP}}{\partial P} \right)_T \frac{1}{U_{SP}}$ (la var. del volume specifico rispetto alle var. di pressione rapportate al var. di riferimento)

Se rispetto a config. di riferimento c'è var. di pressione c'è var. di U_{SP} di β quantifica, c'è "-" poiché all'aumento di ∂P , $\partial U_{SP} < 0 \Rightarrow$ minus positive.

Se ∂U_{SP} sono influenzati da T si può definire un coefficiente di dilatazione termica

Da $U_{SP} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow U_{SP} \cdot \rho = 1 \Rightarrow$ calcolando il differenz. tot. di $U_{SP} + U_{SP} \cdot \rho = 0$

Allora $-\frac{\partial U_{SP}}{U_{SP}} = \frac{\partial \rho}{\rho}$. Ne consegue che $\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$ + tramite var. di densità
 $\hookrightarrow [\beta] = F^{-1} L^2$

Fluidi classificabili in 3 classi:

a) FLUIDI INCOMPRESSIBILI

Tutti quelli con $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = 0$ (me comp. delle var. di press.). Nell'ambito di fenomeni evolutivi dove ci sono ∂P registrano una $\beta \approx 0$. Per questa categoria $\beta = 0 \Rightarrow \rho$ è costante. Si comportano come corpi rigidi.
 Acqua può essere classificata qui. (x alcuni fenomeni Basso valore compressione: $5 \cdot 10^{-9} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^2$)

b) FLUIDI DEBOLMENTE COMPRESSIBILI

Tutti quelli con $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \beta = \text{costante}$ (non nullo). Nei casi dove

⑫ compressibilità H_2O non si può trascurare ma appartiene a b).

Come varia la densità $\rho P = \frac{1}{\beta} \frac{dP}{P}$; integrando i membri

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \frac{1}{\beta} \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = P - P_0 = \frac{1}{\beta} \ln(P/P_0) \Rightarrow \boxed{P = P_0 e^{\beta \Delta P}}$$

c) FLUIDI COMPRESSIBILI

Tutti quelli dove β è variabile e non trascurabile. $\beta = f(P)$; non sono trascurabili neanche le variazioni di temperatura $\beta = f(P, T)$. Ho bisogno dell'eq. di stato e di quella che caratterizza trasformazione termostatica.

Se consideriamo l'acqua con $\beta \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^2$ Vogliamo calcolare

la P rispetto a $P = 1 \text{ atm} \approx 10^4 \text{ kg/m}^2$ che diventa $P = 2 \text{ atm}$, cioè $\frac{\Delta P}{P} = \frac{P - P_0}{P_0} = \frac{P_0 e^{\beta \Delta P} - P_0}{P_0} = e^{\beta \Delta P} - 1$ la var di P per $\Delta P = 1 \text{ atm}$ per $\beta = 5 \cdot 10^{-9}$ e a $\Delta P = 1$ si ottiene $\approx 0,00005 \rightarrow$ variazione molto piccola \Rightarrow

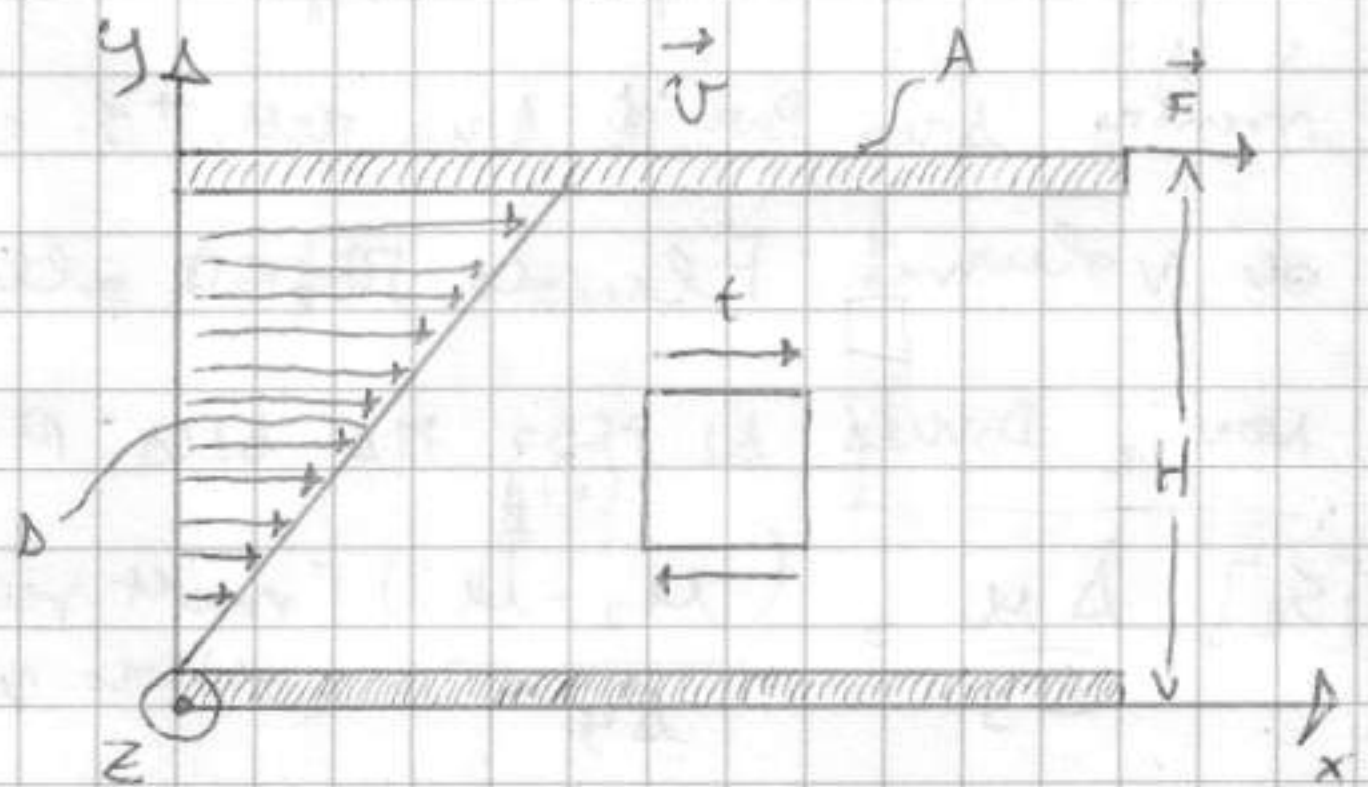
giustifica l'incompressibilità in alcuni casi (tranne per $\Delta P \gg 1 \text{ atm}$)

H

Come accade invece per gli sforzi tangenziali?

Per sistemi deformabili fluidi in presenza di questi sforzi nascono delle DISTORSIONI che variano configurazione geometrica ma mantenendo il volume \rightarrow DEFORMAZIONI DI DISTORSIONE

(esperimento a chiarire questa proprietà): Prendi piastra solida (\rightarrow sol. trascurabile) con estensione lungo z . Ne prendi un'altra con stessa giacitura ed una



distanza H nella quale c'è misce un fluido (es H_2O). Si vuole far muovere piastra sup. con $\vec{v} = v \hat{x}$ lungo x ; è necessario applicare forza \vec{F} e risulta che $|\vec{F}|$ è Area delle piastre $[A]$, al modulo delle v relativa, inversamente prop. a σ tra piastre. Introduciamo quindi coeff.

tipico del fluido introito: $\boxed{|\vec{F}| = \eta A \frac{v}{H}}$, dove η è viscosità

con certo però, compie lavoro. La F però ha azione verticale, però non

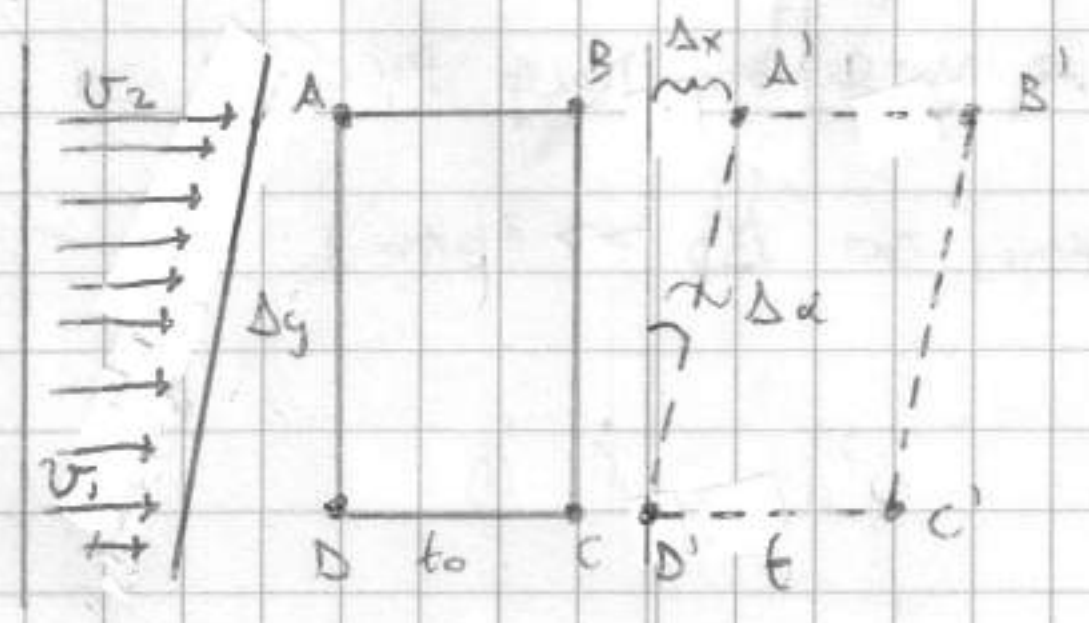
compie lavoro. Questa forza serve a far muovere il fluido non mi

serve \vec{F} , batte spinta iniziale \Rightarrow fluido RESISTE al movimento della

piattaforma. Che tipo di resistenza oppone?

Quando un fluido è a contatto con un solido (e' sempre il solido che aderisce al solido (non scorrimento del fluido); misurando la U V μ t del fluido troveremo il coefficiente D . Fluidi a quota H hanno $|U| = V$ (vicino della piastra). Allontanandosi, la U misura con legge lineare fino a $U=0$ x lo strato a contatto con piastra di sotto + moto piano D COUETTE (moto a simmetria piana). Si può idealizzare $\mu \gg \eta$ altrimenti ci sono effetti di bordo.

Consideriamo la forza tangenziale: $t = \frac{|\vec{F}|}{A} = \mu \frac{V}{H}$. Per elemento di fluido, sollecito e applicato t e opposto $-t$ a quello di sotto.



Domanda colorare H_2O ed evidenziare struttura (viscosità); molto in moto piastra e vertici μ movimento (A e B con $M_2 > M_1$ di C e D). Spontaneamente gli in tempo $t = t_0 + \Delta t$, $\overline{BB'} \equiv \overline{AA'}$, $\Rightarrow \overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$, ma CD lo stesso: $\overline{CC'} \equiv \overline{DD'} \Rightarrow \overline{D'C'} \equiv \overline{DC}$ ma minore dei primi.

Ho adesso un parallelogramma dovuto a deformazione angolare pari a $\Delta \alpha$ mentre Area Par \approx Area rett. \rightarrow Δ è data dall'angolo senza significative variazioni di volume. Fluido RESISTE alle deformazioni. Forza che devo applicare

NON È DOVUTA AL PESO MA ALLA RESISTENZA DEL FLUIDO alla DEFORMAZIONE.

$$[Se] \frac{\Delta M}{\Delta y} = \frac{(M_2 - M_1)}{\Delta y} \left[\text{moltiplicato e} \right] \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{1}{\Delta t} = \frac{tg \Delta \alpha}{\Delta t}$$

Facciamo tendere Δy a dy [particolarmente] comunque che anche Δu ha var $\frac{1}{\Delta t}$; ho $\frac{du}{dy}$

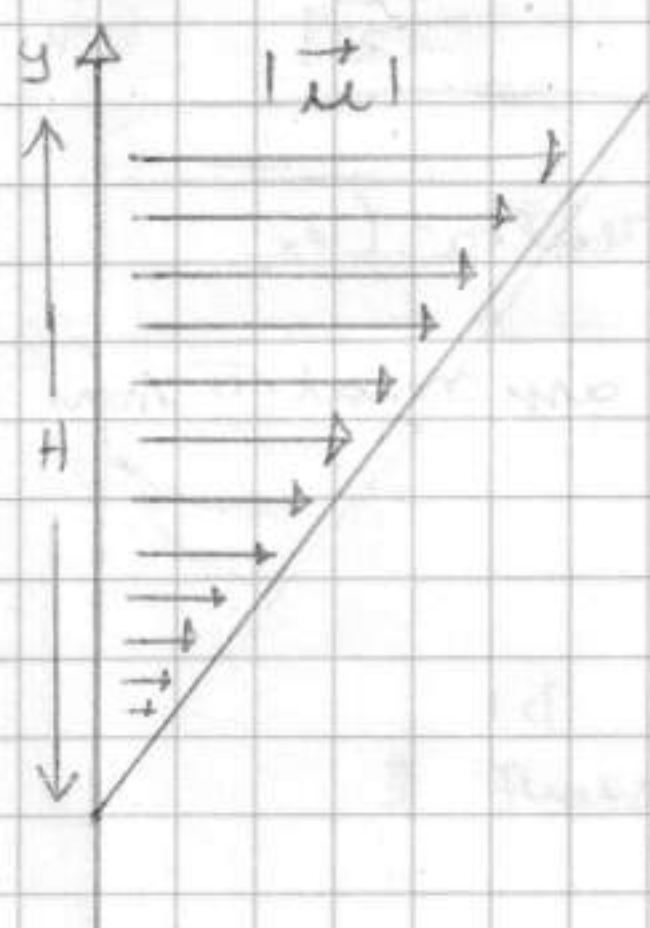
Sviluppando in serie di potenze $\frac{tg \alpha}{\Delta t}$ ho $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} + \frac{1}{3} \frac{\Delta \alpha^3}{\Delta t} + o$ [eliminando] \approx $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ \approx $\frac{du}{dy}$

Quindi $\frac{du}{dy} = \frac{d\alpha}{dt}$ Variazione velocità rispetto a y è equivalente alla variazione di α (angolo di α) nel tempo

Quindi se $t = \mu \frac{V}{H}$ (con V lineare) $\mu \frac{V}{H} = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow$ in questo moto piano gli sforzi t che nascono nel sistema fluido, sono generati da velocità deformazione

$\approx \mu \dot{\alpha}$. Fluidi sono tali che tutte le volte che c'è velocità di def. angolare reagiscono con resistenza t (c'è valore \propto di $\dot{\alpha}$)

I solidi reagiscono alle DEFORMAZIONI, i fluidi alle VELOCITA' delle DEFORMAZIONI



(i sistemi fluidi reagiscono a scorrimenti

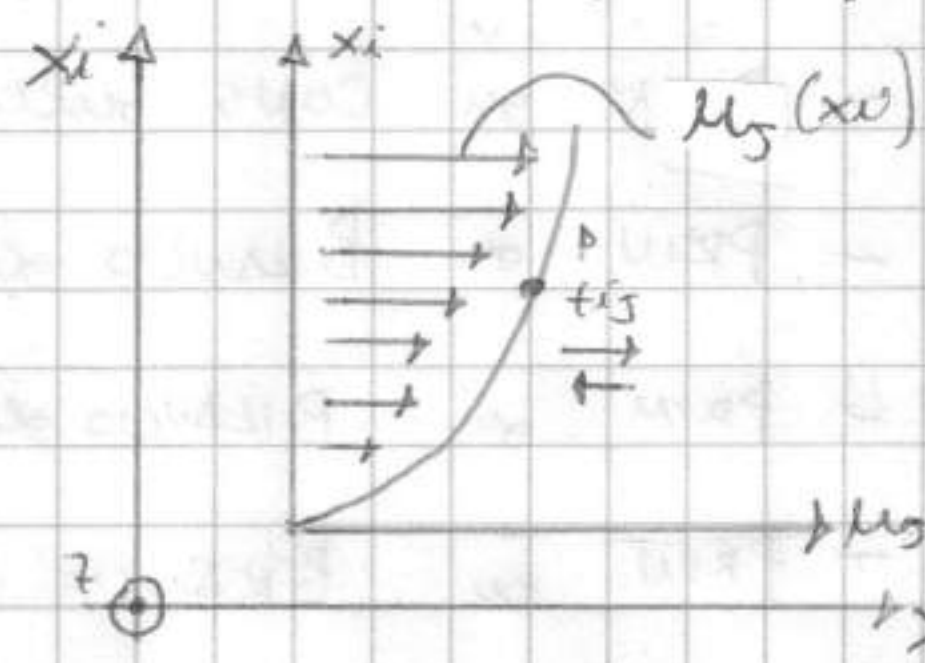
14/10/2005

con resistenza, sforzo TANGENZIALE $\tau = \mu \frac{v}{H} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \dot{\gamma}$ (gradiente di v)

Caso di particolare dell'esperimento. Poi Newton generalizza

to e definisce la LEGGE DI NEWTON:

In \mathbb{R}^3 c'è int. fluido sottoposto a deformazione con velocità che varia



Rispetto a x_i (simmetria piana) $\forall P \in$ al sistema

si genera a causa di questo campo di velocità uno sforzo TANGENZIALE

$$\tau_{ij} = \mu \frac{du_j}{dx_i} \quad (\text{indice } j: \text{DIREZIONE SPOSTO}) ; \text{ nome dato da Carnot rispetto}$$

alla direzione ortogonale; questo gradiente di velocità produce τ_{ij} .

v può avere 4 componenti di variazione (lungo x, y, z) \Rightarrow 4 sorta + complesso.

[Soluzione complessiva x alcuni fluidi sopra 1 secolo] L.D.N. vale per tutti i sistemi fluidi; μ = VISCOSITA' DINAMICA = η , a T e P costante, μ q. scalare

questi saranno chiamati FLUIDI NEWTONIANI [μ, T, P costanti]

(REOLOGIA: branca della meccanica dei fluidi che studia il comportamento viscoso dei fluidi)

A questa categoria appartiene l'acqua, l'aria, l'olio, il mercurio...

VISCOSITA' (Resistenza a scorrimenti) quasi mai può essere trascurata.

Le dimensioni saranno: $\mu \equiv \tau \frac{dx_i}{du_j}$; $[\mu] = \frac{F}{L^2} \cdot \frac{L}{\frac{F}{L^2}} = FL^{-2}T$ (F: sforzo, L: lunghezza, T: tempo)

L'acqua ha μ sostanzialmente costante e $\approx 10^{-4} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Si introduce il rapporto tra viscosità dinamica e densità:

$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho} : \text{VISCOSITA' CINEMATICA}, \text{ le dimensioni: } [\nu] = \frac{FL^{-2}T}{FL^{-3}} = L^2 T^{-1}$$

Per l'acqua $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; valore piccolo ma importante perché qualitativamente rappresentano l'immersione di "forze" x far scorrere l'acqua.

H
(→)

Tutti i modelli che descrivono il comportamento dinamico di un sistema materiale derivano da i PRINCIPI ASSIOMATICI DELLA MECCANICA

Nostri schemi mentali che trovano diretto riscontro nella realtà. (ex. schema del continuo). Questi principi assiomatici sono:

- PRIN. di CONSERV. della MASSA
- PRIN. di BILANCIO della q di moto
- PRIN. di BILANCIO del MOMENTO della q di moto
- PRIN. di BILANCIO dell'energia

PRINCIPI DI
CONSERVAZIONE E
BILANCIO

(grandezze si conservano e si bilanciano).

Però sist. materiale \geq in dominio finito e limitato, queste grandezze - \forall evoluzione

dinamica - si conservano (valide solo per domini finiti e limitati).

Nell'evoluzione temporale il "dominio di controllo" e' lo spazio, quello "fluidico" no.

P.A.D.M. vanno riferiti a sistemi che contengono la massa "individuata" di materia (DDC). x i calcoli conviene introdurre volume fisso.

Sistema di riferimento deve essere INERTIALE (puo' muoversi con $U=k$ rispetto a Terra o stelle fisse), quindi 33

Se invece sist. fluido e' definito su sistema NON INERTIALE, i P.A.D.M. devono essere adattati.

Dal prin. della con. della q di moto e' derivato il concetto di FORTE.

Ogni volta che c'è variazione della Q di moto del sistema materiale dovuta ad azione esterna si parla di forza.] due categorie che li racchiudono:

① FORZE DI MASSA

② FORZE DI CONTATTO (o di SUPERFICIE)

①: tutte quelle azioni in materia dovute alle masse del corpo,] e proporzionali
azioni esercitate nel corpo a causa della presenza della sua massa

(ex. f. peso minorata su vari pianeti)

②: Come riferimenti?
16

Ho dominio fluido Ω con ρ di materia. Ad ogni

partizione $\Delta\Omega$ è applicata forza $\Delta\vec{R}_m$ alla massa ($\Delta\Omega$)

L'elemento è soggetto anche a momento di massa.

Si suppone che $\forall P \in \Omega$ esiste finito questo limite:

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow P} \frac{\Delta\vec{R}_m}{\rho\Delta\Omega} \text{ e che } \lim_{\Delta\Omega \rightarrow P} \frac{\Delta\vec{\Pi}_m}{\rho\Delta\Omega} = 0 \quad \forall P \in \Omega$$

le cui dimensioni sono $[\vec{f}] = \frac{F}{FL^{-3}T^2L^3} = LT^{-2}$ (dimensioni di un'accelerazione)

FORZE PER UNITA' DI MASSA

La \vec{R}_m che agiscono su Ω è: $\vec{R}_m = \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega$ e il momento

simultaneamente delle forze che agiscono su Ω è: $\vec{\Pi}_m = \int_{\Omega} \rho (\vec{r} \times \vec{f}) d\Omega$

Tutte forze di massa si possono rappresentare tramite \vec{f} vettore continuo che descrive la distribuzione di Ω e le \vec{f} di massa per unità di massa.

C'è massa $\rho(\vec{x}, t)$ che è sottoposta all'accelerazione di gravità [x m] g costante.

otteniamo modulo valore forza peso, definita come funzione γ del

nome PESO SPECIFICO: $\gamma(\vec{x}, t) \equiv \rho(\vec{x}, t) g$ dalle dim. $[\gamma] = FL^{-3}$

Per l'acqua $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$.

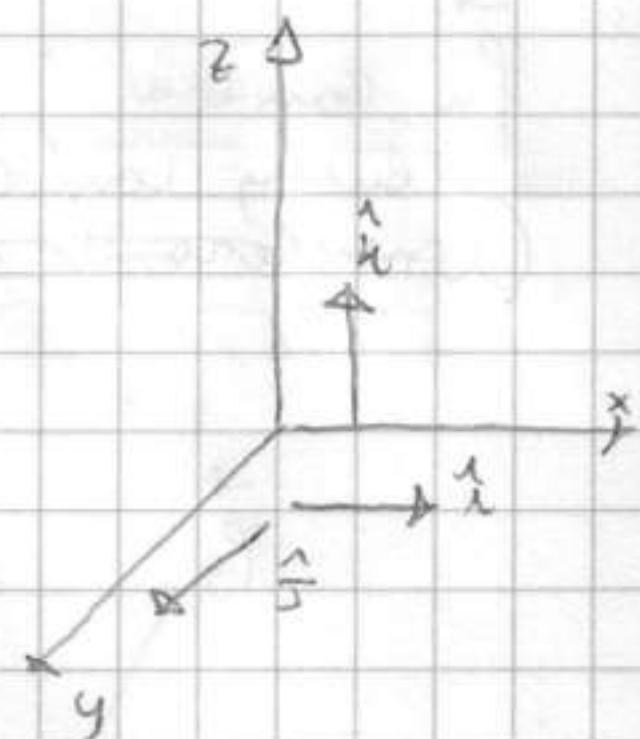
Per le forze peso la $\vec{f} \equiv -\hat{k} g$ (introdotta un vettore \hat{k} orientato

verso l'alto; \vec{f} è vettoriale, g è scalare); per comodità -

essendo $|\hat{k}| = 1$ - però in sistema \mathbb{R}^3 si può dimostrare

che $\nabla z = \hat{k}$ $\left[\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \hat{k} \right]$ quindi

$$\vec{f} = -\nabla z g$$



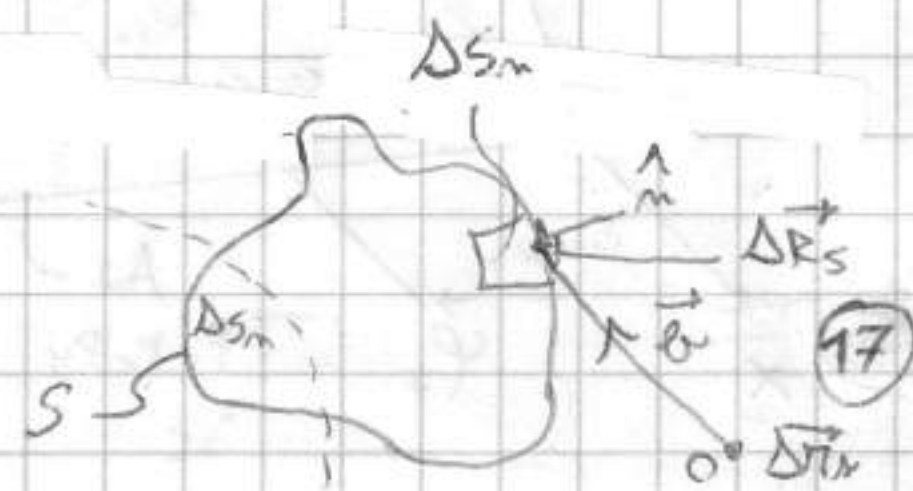
② A causa del contatto tramite certa superficie tra due corpi c'è

reazione. Sia definito un corpo che viene modificato tramite il contatto

con forze esterne

Δs di superficie dove agisce $\Delta\vec{R}_s$

Puo' essere immaginato come azione su



Cauchy dice che in ogni punto della superficie di un corpo che è a contatto con un altro si ammette una distribuzione continua di sforzi / la risultante degli sforzi e dei momenti sulla surf. \equiv all'azione e al momento di contatto che il corpo riceve per interagire con l'altro corpo.

$\lim_{\Delta s_m \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}_m}{\Delta s_m} = 0$

Ne consegue de $\vec{R}_r = \int_S \vec{\varphi}_m \, dS$ e

H

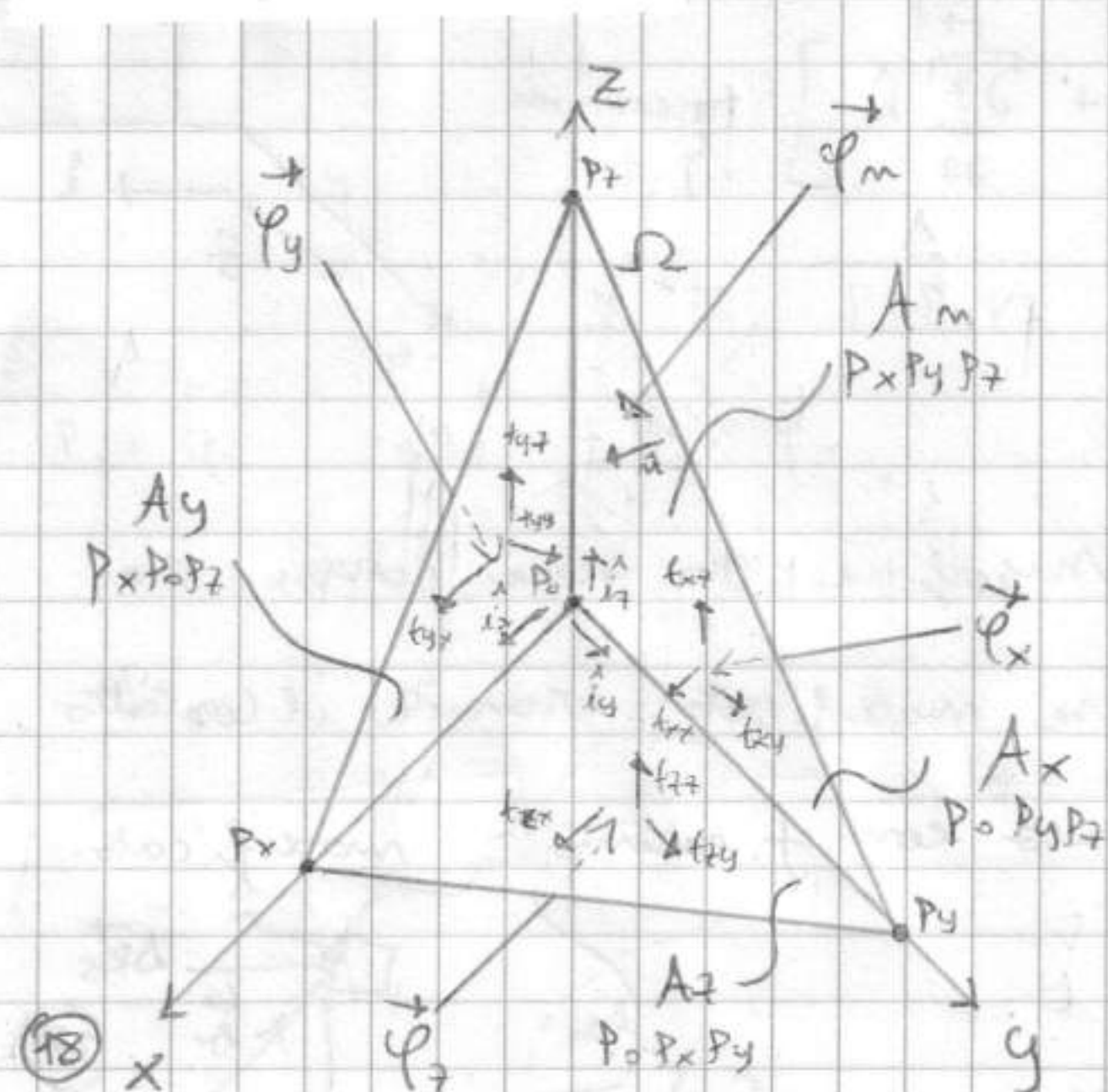
A diagram showing a point P where three lines intersect. Two lines are labeled λ_m and one is labeled λ_n .

17/10/2005

A diagram showing a curved surface element of length Δs_m . A normal force \vec{F}_m acts perpendicular to the surface, and a weight force \vec{W}_m acts vertically downwards from the center of the element.

in P_0 , poi 3 punti nei 3 archi in
maniera arbitraria e congiungo; ho
tetraedro $P_0 P_x P_y P_z$; la sup. $P_0 P_y P_z$ ha
come giacitura $\hat{i}_x - P_x P_0 P_z$ ha invece
 $\hat{i}_y - P_x P_0 P_y$ ha $\hat{i}_z -$ infine $P_x P_y P_z$
ha in ogni punto la stessa \hat{n} con
direzione costante.

Comp. una materia contenuta che riceve



azioni di contatto da tutte e 4 le facce. Sistema in generale sottoposto a f. di massa e contatto; e' in equilibrio dinamico sta rotolando e' P.A.D.M. nel bilancio delle q. su moto. $\sum \vec{F}$ applicate a sistema: $\vec{R}_m + \sum \vec{F}_{superficie} : \vec{R}_s$, dove equib. brava lo vor su q. su moto: $\int_{\Omega} \rho \vec{V} \Rightarrow$

$$\vec{R}_m + \vec{R}_s = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\Omega.$$

Tornando all'ex. Partiamo da $P_y P_o P_z$; azione di contatto nella massa e' rappresentabile tramite distribuzione $\vec{\varphi}_x$ [sparti in generale non sono // a \hat{n}].

\Rightarrow rispetto a base in \mathbb{R}^3 $\vec{\varphi}_x$ ha 3 componenti (t_{xx}, t_{xy}, t_{xz}) [1 indice e' giacitura spora, il secondo la direzione]. Lo stesso per altre superfici

$(\vec{\varphi}_y : t_{yx}, t_{yy}, t_{yz}) ; \vec{\varphi}_z : (t_{zx}, t_{zy}, t_{zz})$; e' ultima faccia su giacitura generica \hat{n} [costante] e rapp. da $\vec{\varphi}_n$. Si può explicitare P.A.D.M.

[nota: \hat{n} [generico che e' generico ma faccia] e' vettore indicatore rispetto a

base come: $\hat{n} = n_x \hat{i}_x + n_y \hat{i}_y + n_z \hat{i}_z$ (n_x, n_y, n_z : costanti DIRETTORI

dello SFORTO); i vari sparti sono rapp. da $\vec{\varphi}_k = t_{kj} \hat{i}_j$ con $k \in J = x, y, z$;

$\vec{\varphi}_n$ (linea) = $t_{nj} \hat{i}_j$

Le forze di massa $\vec{R}_m = \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega$; le forze di superficie $\vec{R}_s = \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}_e d(\partial\Omega)$

Le P.A.D.M. lo posso riformulare come: $\int_{\Omega} \rho \left(\vec{f} - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}_e d(\partial\Omega) = 0$

Il 1° integrale $\int_{\Omega} \rho \left(\vec{f} - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) d\Omega$ e' l'int. di volume di una f.

Continua $[TH. MEDIA]^*$ nell'interv. il valore medio; \Rightarrow l'int. e' uguale a

$\left[\rho \left(\vec{f} - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \right]^* \Omega$

Il 2° integrale di superficie, avendo una frontiera particolare, si può

decomporlo in: $\int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}_e d(\partial\Omega) = \int_{\Delta_x} \vec{\varphi}_x d\Delta_x + \int_{\Delta_y} \vec{\varphi}_y d\Delta_y + \int_{\Delta_z} \vec{\varphi}_z d\Delta_z +$

$\int_{\Delta_n} \vec{\varphi}_n d\Delta_n$, essendo continue posso applicare th. media, quindi =

$= \vec{\varphi}_x^* \Delta_x + \vec{\varphi}_y^* \Delta_y + \vec{\varphi}_z^* \Delta_z + \vec{\varphi}_n^* \Delta_n$

A_x è proiezione di A_m su P_x, P_y, P_z [ogni dei 3 moltiplica separatamente

l'elemento di superficie in cui il vettore \vec{r} ha coseno proiettante di moltiplicare per la proiezione

Il coseno proiettante è il coseno proiettore $m_x \Rightarrow A_x = -m_x A_m$ (dal

disegno il cos. dir. su n sup. a x è negativo [$\alpha > \pi/2$] \Rightarrow mette il "-"), lo

stesso per altri: $A_y = -m_y A_m$ e $A_z = -m_z A_m$

Tornando all'eq. di prima notiamo: $A_m \left[\vec{\varphi}_m - (m_x \vec{\varphi}_x + m_y \vec{\varphi}_y + m_z \vec{\varphi}_z) \right]^*$

Riprendendo la equazione $\left[P \left(\vec{f} - \frac{d\vec{U}}{dt} \right) \right]^* \frac{\Omega}{A_m} + \left[\vec{\varphi}_m - (m_x \vec{\varphi}_x + m_y \vec{\varphi}_y + m_z \vec{\varphi}_z) \right]^* A_m = 0$. (Divido per A_m)

Ora avviciniamo all'equazione il limite: $P_x, P_y, P_z \rightarrow P_0$; i punti iniziali

feroci li faccio tendere a 0 \Rightarrow Volume finito tende a volume ∞ ; Relazione

x i PADM delle aree sempre costante $\Rightarrow \lim \rightarrow 0$; per $\frac{\Omega}{A_m} = \frac{1}{\infty}$ tende

irrelevante la prima espressione (è piccolo e non altera il 2° membro

dal quale dipende tutto, non bilancia il sistema)

$$(vedi 2/1) \rightarrow \boxed{\vec{\varphi}_m = m_x \vec{\varphi}_x + m_y \vec{\varphi}_y + m_z \vec{\varphi}_z} \quad \text{TEOREMA di CAUCHY}$$

[comprova * poiché i valori degli sforzi sono univocamente calcolati in P_0].

Detesto il sistema errore in equilibrio, si è scelto che lo sforzo in un

pt. qualunque relativo a giacitura in qualsiasi è univocamente definito quando

conosciamo gli sforzi in quel punto rispetto a 3 giaciture x, y, z .

(th. di moltiplicazione anche rispetto a terra qualunque che costituisce base).

- Sforzo in un punto è univocamente definito quando conosciamo il valore degli

sforzi in quel punto rispetto a 3 giaciture linearmente indipendenti.

- Non è vero che $\vec{\varphi}_m$ ha ∞ gradi di libertà.

Esprimiamo la relazione:

$$\vec{\varphi}_m = \left[m_x t_{xx} + m_y t_{yx} + m_z t_{zx} \right] \hat{i}_x + \left[m_x t_{xy} + m_y t_{yy} + m_z t_{zy} \right] \hat{i}_y + \left[m_x t_{xz} + m_y t_{yz} + m_z t_{zz} \right] \hat{i}_z = \left(\text{quadrato} \right)$$

② lo sviluppo delle componenti si può scrivere in maniera

compatta) = $m_k t_{kj} i_j^{\wedge} \rightarrow$ si chiama il prodotto misto tra

vetture \hat{m} con il tensore \underline{I} con componenti $i, k, j \rightarrow = \hat{m} \cdot \underline{I}$

Relazione di Cauchy si può scrivere come $\underline{\varphi}_m = \hat{m} \cdot \underline{I}$

la distribuzione degli sforzi in un sistema materiale continuo è univocamente definita da un TENSORE del secondo ordine.

È un tensore legato a componenti di alcuni sforzi: TENSORE DEGLI SFORZI

che agisce come operatore lineare / applicato a generica giacitura \hat{m}

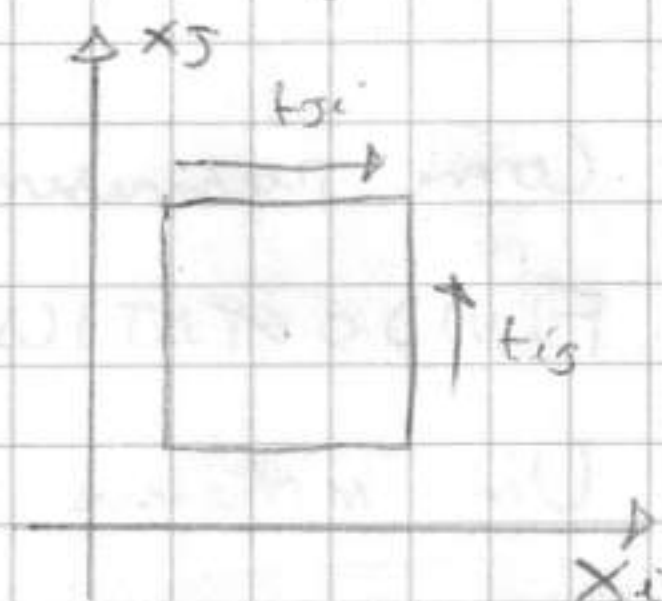
che ESISTENTE lo sforzo in quel punto rispetto a quella giacitura.

Questo tensore è definito come:

$\underline{I} \equiv t_{kj} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow$ ogni riga è componente di un particolare sforzo.

$\underline{\varphi}_m$, essendo \underline{I} simmetrico [dim: materia in Ω è in equilibrio che deve soddisfare il prin. di bil. del momento di quantità di moto]; deve vedere che $\underline{M}_m + \underline{M}_r = \frac{d}{dt} \underline{M}_{\text{quantità di moto}}$ (vedremo che $t_{ij} = t_{ji}^*$), ha 6 gradi di libertà [basta 6 componenti t x ricavare \underline{I}]

(se prendiamo un \square di materia sottoposto a sforzi, x essere in equilibrio (\Rightarrow x non ruotare) t_{ji} deve essere uguale a t_{ij})



ha componenti \underline{I} risp. a giacitura varia. Abbiamo sempre considerato la pressione come sforzo normale, ora notiamo che non è univocamente definita.

\underline{I} ha degli invarianti (3), cioè grandezze costanti. Uno di questi è

la traccia; se $\text{tr } \underline{I} = t_{ii}$ e facci la media: $\frac{1}{3} \text{tr } \underline{I} = \frac{1}{3} t_{ii} \equiv p$

lo definiamo come PRESSIONE: valore medio delle componenti \underline{I} degli sforzi rispetto a 3 giaciture linearmente indipendenti nel punto.

È buona stima; considerando base di riferimento pressione invariata.

Essendo \underline{I} simmetrico è decomponibile in tensore isotropo + tensore "RESIDUA":

$$\underline{I} = p \underline{I} + \underline{I}' \rightarrow t_{kj} = p \delta_{kj} + t'_{kj} \quad t'_{kj} = t_{kj} - p \delta_{kj}$$

Sarà' tenore che nelle diag. principale ha le comp. di partenza $-\frac{1}{3}$ della media (\Rightarrow somma $= 0$); gli altri sono / tra gli n taglie N diverse
 $(\delta_{ij} = 0) \Rightarrow \underline{I}$ con $\text{tr} = 0$.

19/10/05

$$\underline{I} = \underline{P} \underline{I} + \underline{I}' \rightarrow \text{Componenti degli sf. tang. e diag. principale nulla}$$

$$\vec{\varphi}_m = \hat{n} \cdot \underline{I}; \text{ caso particolare (supponiamo che sf. hanno 2 componenti)}$$

Pero' in alcuni casi la condizione dinamica sistema e' / sf. hanno solo

\underline{I} (stessa direzione gravitazione). Quale sarebbe la struttura di \underline{I} ?

$$\varphi_m \text{ si può esprimere come } t \hat{n} = m_n t_{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j$$

Proiettando ottengo: $t_{xx} \hat{i}_x + t_{yy} \hat{i}_y + t_{zz} \hat{i}_z$ (rimpetto

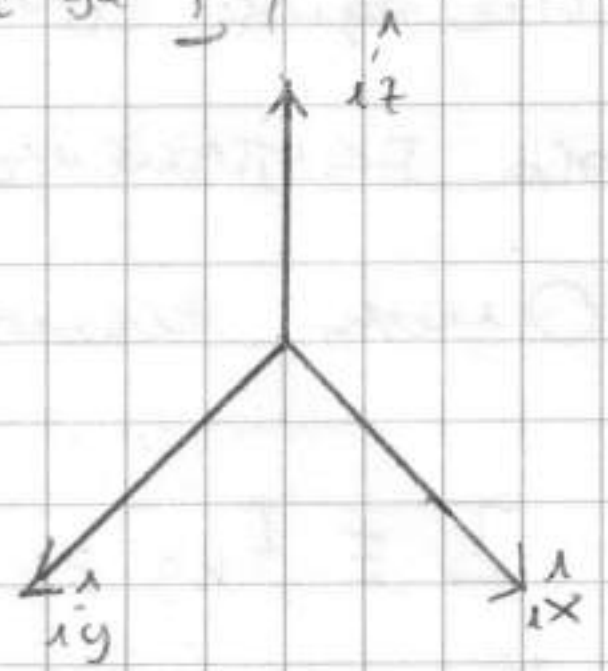
$$\text{a } \mathbb{R}^3) = m_x t_{xx} \hat{i}_x + m_y t_{yy} \hat{i}_y + m_z t_{zz} \hat{i}_z$$

Dalle equazioni eguagliamo tra componenti omologhe:

$$t = t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} \rightarrow \text{in queste sit. il tenore degli sf. ha}$$

isotropia e il valore dello sf. ha sempre stesso valore [t è costante

$$\text{in tutte le direzioni}] \rightarrow t = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{I}) \equiv P$$



Come rappresentatore la cond. gli equilibrio dinamico in sist. fluído in con. Mat. del

FLUIDOSTATICA

Un sistema materiale fluído e' in condizioni FLUIDOSTATICHE quando

rimpetto ad un sistema di riferimento inerziale, il campo di

$$\vec{v} \text{ rotazionale e } \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad \forall t \in \mathbb{I}$$

(sist. m. fluído ha $v = 0$ o $v = k$)

$$\vec{R}_m + \vec{R}_s = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega \rightarrow \text{stato senza rotazione (2 termine}$$

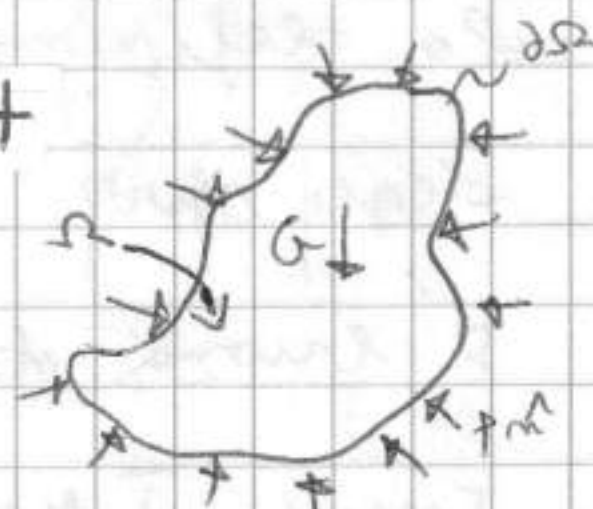
è nullo) \rightarrow le forze di massa e superficie si devono BILANCIARE tra

$$\text{loro, ex. con } \vec{g}, \text{ possiamo dire che } \vec{R}_m + \vec{R}_s = \int_{\Omega} -\rho \vec{g} d\Omega +$$

(sist. fluído rotazionale solo a f. peso).

Sforzi ten. marcano solo in \underline{I} dei ∇v , ma qui $v = k$

\Rightarrow gli unici sforzi scambiabili sono PURAMENTE NORMALI esterni



(22) da $p \hat{n}$

$$\vec{\varphi}_m = \hat{n} \cdot \underline{I} = \hat{n} \cdot p \underline{I} = p \hat{n} \quad (\text{da formula}) + \int_{\partial\Omega} p \hat{n} d(\partial\Omega) = 0$$

Relazione Morera per via intuitiva da ARCHIMEDE che afferma che ogni corpo immerso ^{in un fluido} riceve da esso una spinta verso l'alto di modulo pari al peso del volume di fluido spostato.

Principio di galleggiamento Archimede si ritrova in questa relazione.

Per un sistema fluidostatico puro fluido è bilanciato da forze di pressione che riceve da esterno.

$$\int_{\Omega} -\rho g \nabla z d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \hat{n} d(\partial\Omega) = 0 \quad \text{ovvero come} \quad \boxed{\vec{G} + \vec{\Pi}_p = 0}$$

Si può scrivere con:

$$\vec{\Pi}_p = \int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot p \underline{I} d(\partial\Omega) = p \hat{n} \quad (\text{Tramite th. della divergenza lo}$$

trasforma in int. di volume) $= - \int_{\Omega} \nabla \cdot p \underline{I} d\Omega$; si può scrivere la relazione con:

$$\boxed{\int_{\Omega} -(\rho g \nabla z + \nabla \cdot p \underline{I}) d\Omega = 0} \quad \rightarrow \text{Forma INTEGRALE}$$

X noi Ω è dom. chiuso qualunque

\Rightarrow deve essere nulla la f. integranda

da [ma può accadere che non dipenda sempre da f]. Ne consegue

che: $\nabla \cdot p \underline{I} + \rho g \nabla z = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Da proprietà 3) op. diff.:

nono si ric che $\boxed{\nabla p = -\rho g \nabla z}$ \rightarrow FORMULAZIONE DI EQUILIBRIO INDEFINITA

EQUAZIONE INDEFINITA DI EQUILIBRIO DELLA FLUIDOSTATICA

Abbiamo dim. che $\nabla z / |\hat{n}| \rightarrow 1$ e \perp a SUP. ORIZZONTALE

In fn. le superfici ISOBARE sono x forza ORIZZONTALI ($\nabla p \parallel \nabla z$).

↳ Bicchiere d'acqua inclinato, l'acqua torna dritta.

Se fluido è BAROTROPICO, (fluido dove la densità ρ solo della pressione o della temperatura), ne consegue che sono anche superfici ISOCORE (stessa ρ) e ISOTERME (stessa temp.).

Eventuali squilibri mettono in moto fluido e non siamo in f.n.

Se integriamo questa eq. proiettandola su assi:

x) $\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow P$ è cost. risp. a x

y) $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ (stesso risultato); z) $\frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma$

\Downarrow

Sup. orizzontali hanno P costanti, P varia solo rispetto a var. di quota.

Integrando $\int dz + \int \frac{1}{\gamma} dP = 0 \rightarrow z + \int \frac{dP}{\gamma} = \text{Costante}$ in $\Omega =$

$= \zeta$: QUOTA PIETOMETRICA con $[\zeta] = L$

In fluidostatica la ζ è una costante nel dominio di definizione.

IDROSTATICA (es. acqua), categoria fluidostatica \rightarrow LEGGE DI STEVINO

Cost. γ costante

La relazione diventa

$$\boxed{z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost} = \zeta}$$

ΔZ ALTEZZA GEOMETRICA

$\Delta \frac{P}{\gamma}$ ALTEZZA DI PRESSIONE

Pressioni variano linearmente con quota z .

Ex: sistema idrostatico con piano di

inferimento qualunque e pts A e B

$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = \zeta$; lo stesso per B:

$z_B + \frac{P_B}{\gamma} = \zeta$. Facendo la differenza si ha che $(P_A - P_B) = \gamma(z_B - z_A)$

dove $z_B - z_A$ è la diff. di quota tra punti $\Rightarrow (P_A - P_B) = \gamma h$

In un sist. idrostatico P varia aumentando o diminuendo di quota con una quantità di incremento pari al peso della colonna liquida che separa i due punti.

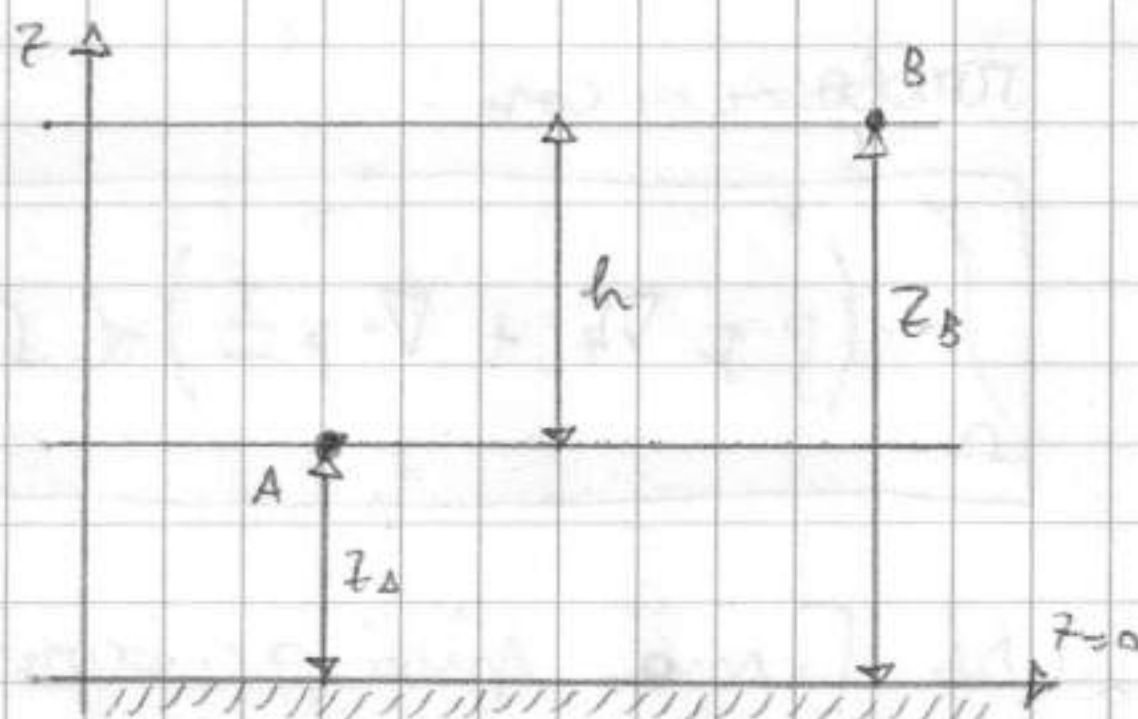
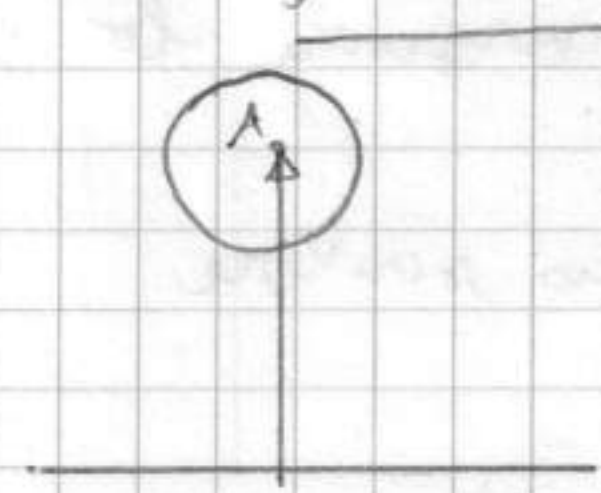
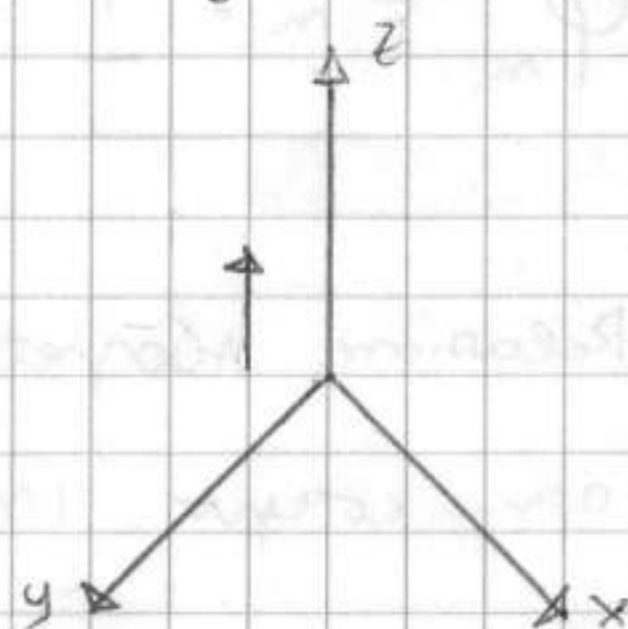
PRESSIONE RELATIVA. Voglia valutare P_A relativamente a P_B .

Definisco una PRESSIONE DI RIFERIMENTO (es. $P_B \equiv P^*$). La PRESSIONE RELATIVA

$P_{A \text{ rel}} = P_{A \text{ abs}} - P^* = (\text{pressione assoluta in A} - \text{pressione relativa})$

pari a $= \gamma h$.

24) Si assume come P^* la P. atmosferica (si trattano sistemi interni)



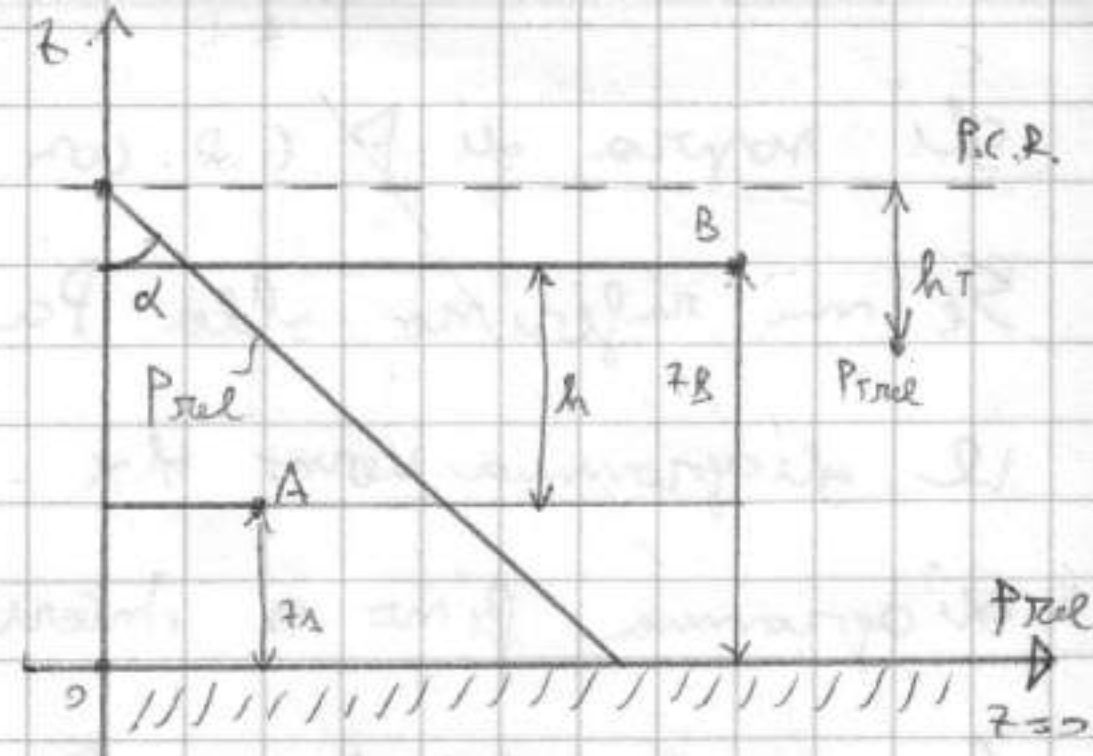
in ambiente con aria, come in realtà).

Costruiamo diagramma delle pressioni.

P_A ha certo valore P_{rel} e $P_B < P_A$ ($P^* \equiv P_{atm}$)

\equiv pressione di 10^4 kg/m^2 ; $\equiv 10,33 \text{ mt di}$
colonna d'acqua; $\equiv 760 \text{ mmHg}$ [$\rho_{Hg} > \rho_{H_2O}$])

Trovare una retta inclinata con $\text{tg } \alpha = \gamma$. Intersezione con asse z ha quota con $P_{rel} = 0$; quota chiamata PIANO DEI CARICHI RELATIVI; piano per il quale la $P_{rel} = 0$; ci sono punti dove $P_{atm} = P^*$. La P di ogni punto al di sotto di P.C.R. (P qualunque) sarà $P_{rel} = \gamma h_T$

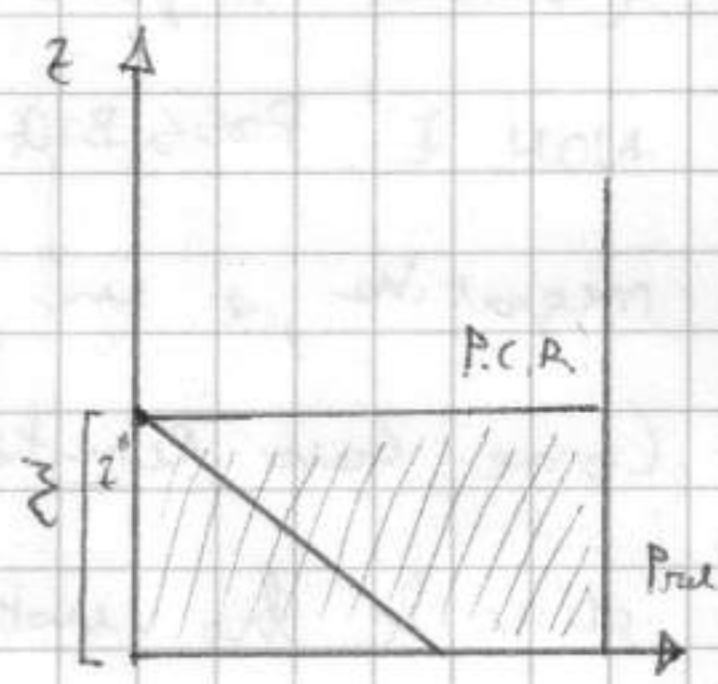


Ex: Recipiente con liquido incompressibile

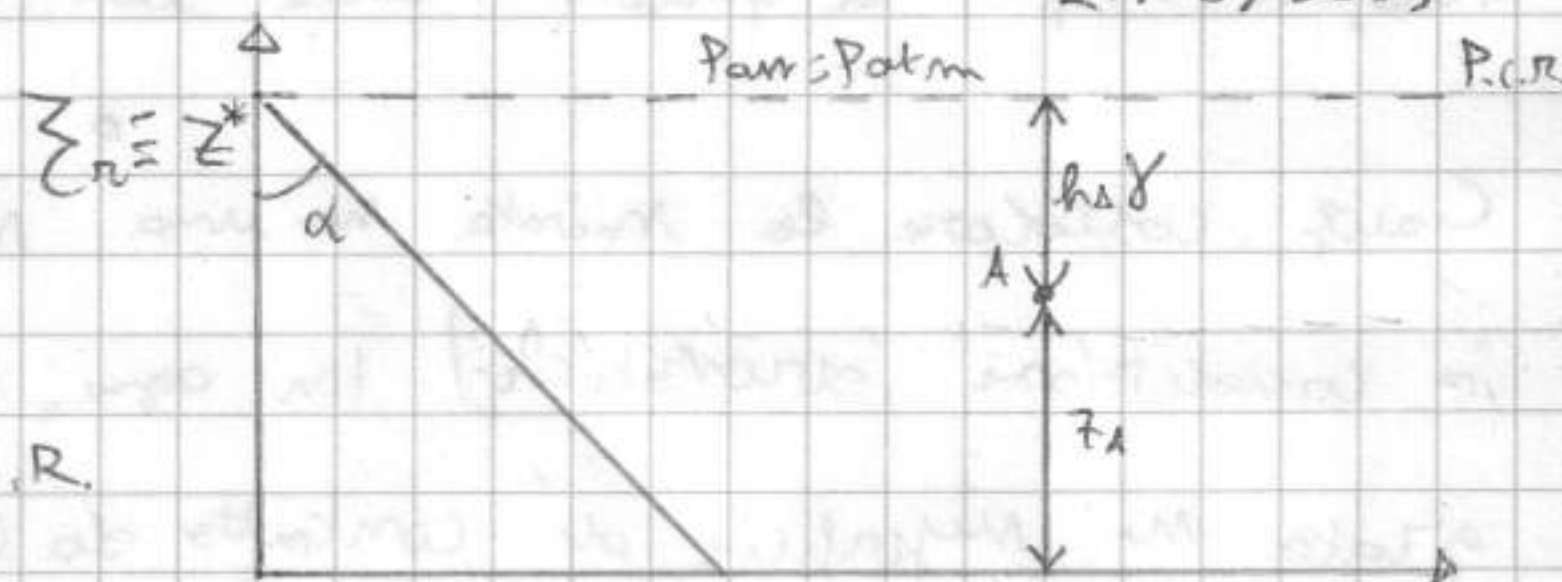
Diagramma var. press. incompress. Le cond. al Contorno

(superficie a contatto con aria) \rightarrow no che quello è

P.C.R. \rightarrow la sua quota è $z = z^* + 0$, $P_{A,rel} = \gamma h_A$



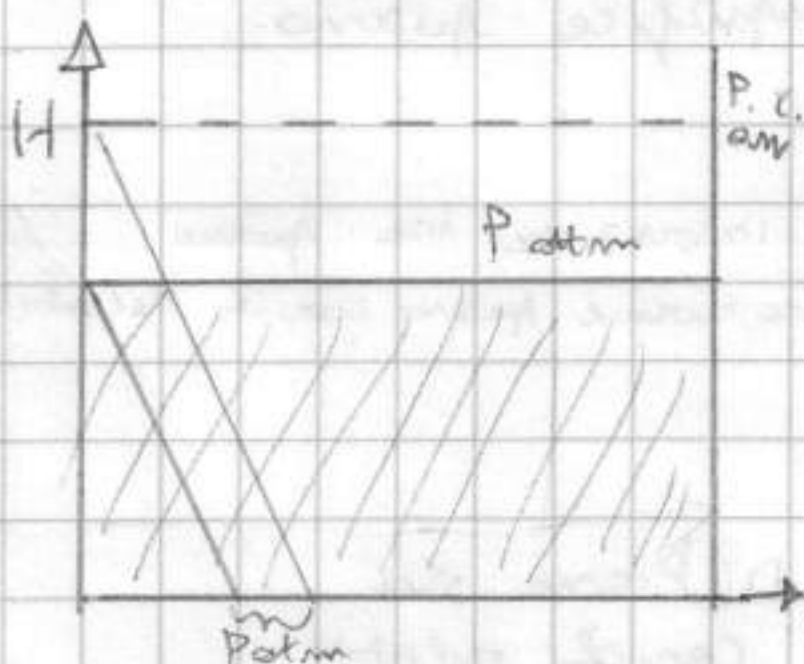
$$P_r = \gamma(z_r - z); \text{tg } \alpha = \gamma$$



$$P_A = \gamma(z_r - z_A) = \gamma h_A$$

Affondamento del punto rispetto a P.C.R.

Ex: ①



Supponiamo ora di avere

un SERBATOIO CHIUSO. In questo

caso non si può tracciare il

diagramma! Non conosciamo z

Per conoscere il valore della pressione nel sistema dello

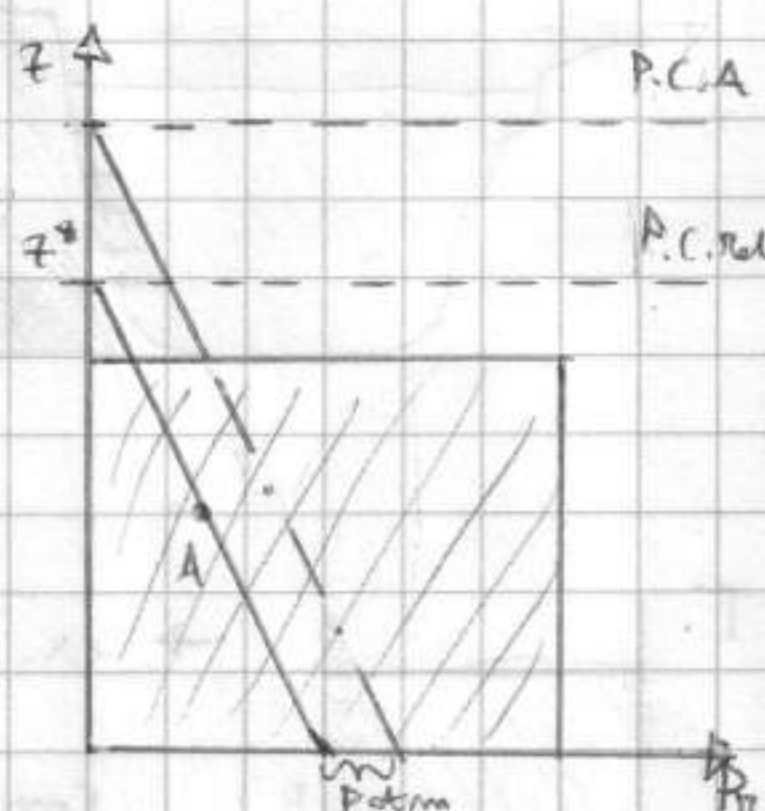
conoscere quello in un punto. Conoscendo invece, posso fare

diagramma. In z^* ho P.C.R. (è PIANO IDEALE, non ci si trova nessun

p.to del sistema). Ogni punto è in pressione ($P > P_{atm}$).

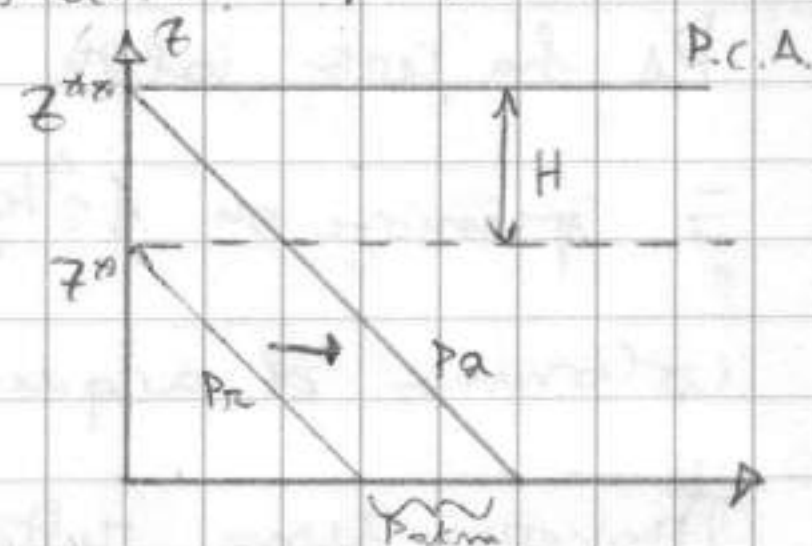
Potrebbe accadere che ci sia questo diagramma.

P.C.R. è a quella quota. Ci sarebbero i punti al



di sopra di P.C.R. con $P_{rel} < 0$. $[P_{arr} < P_{atm}]$.

Se mi riferisco alla Pa basta che a P_{rel} aggiungo P_{atm} → traslo
il diagramma verso dx. Prolungando il nuovo
diagramma fino a intersezione trovo z^{**} individuata



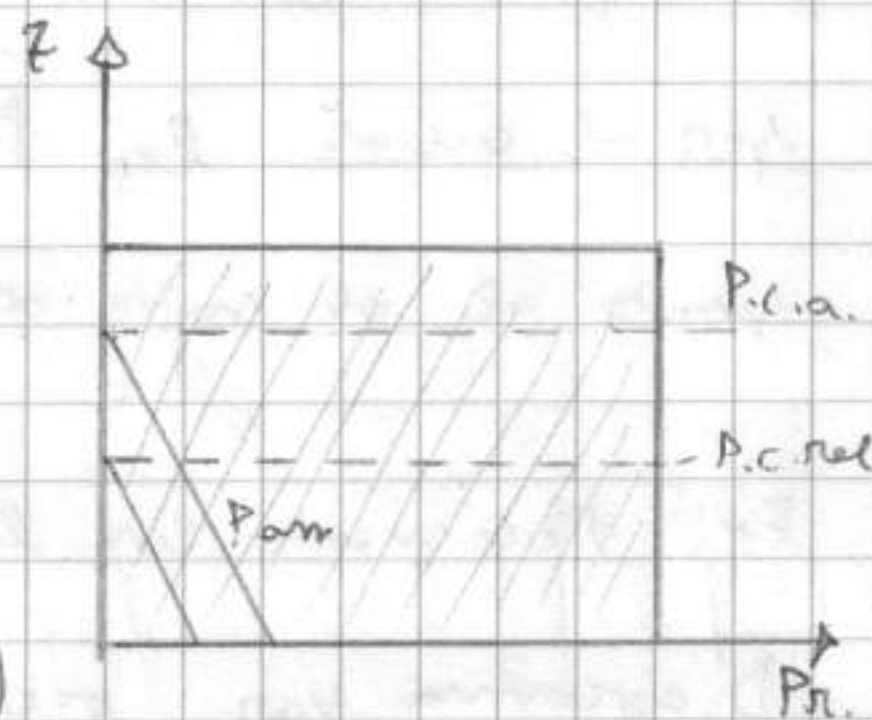
la quota del PIANO DEI CARICHI ASSOLUTI: quel piano

nel quale, rispetto all'andamento delle Press. considerate, si ha una $P_{arr} = 0$

$\gamma H = P_{atm}$. In ① mi alto di $H = P_{atm} / \gamma$

Se in ② traslo e per farlo ottengo:

(P.C.A. inferiore a parte superiore sistema).



NON E' POSSIBILE → c'è zona con pressione ASSOLUTA

negativa, e' un assurdo fisico (i ora stato evitato)

Come caso limite posso avere $P.C. arr \equiv$ all'estremo superiore (ma vuol
dire che ho vuoto, non avrebbe senso, non si raggiunge mai). Nelle

realta' i pti a quota + alte del sistema hanno $P_{arr} > 0$.

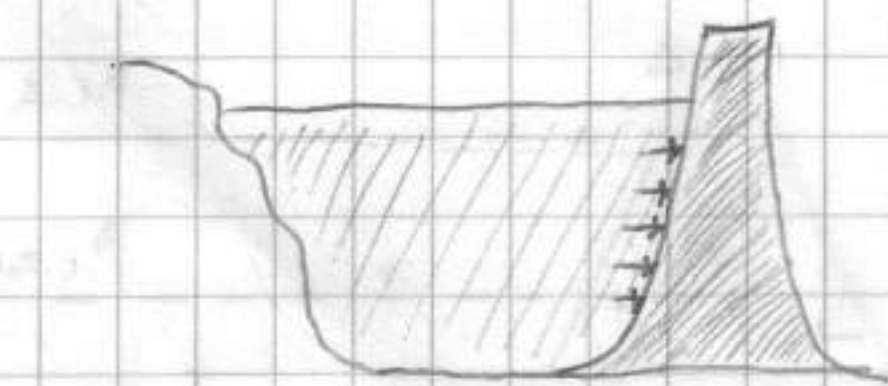
Come collocare la spinta su una superficie solida a contatto con liquido
in condizioni statiche. In ogni pto di contatto c'è pressione che, inte-
grata su superficie di contatto dà la SPINTA.

Semplice se calcolo su superficie piana.

SPINTA IDROSTATICA.

$$\vec{T}_p = \int_S P \cdot \vec{n} dS$$

* interazione tra piano
gravitazionale e piano carichi relativi

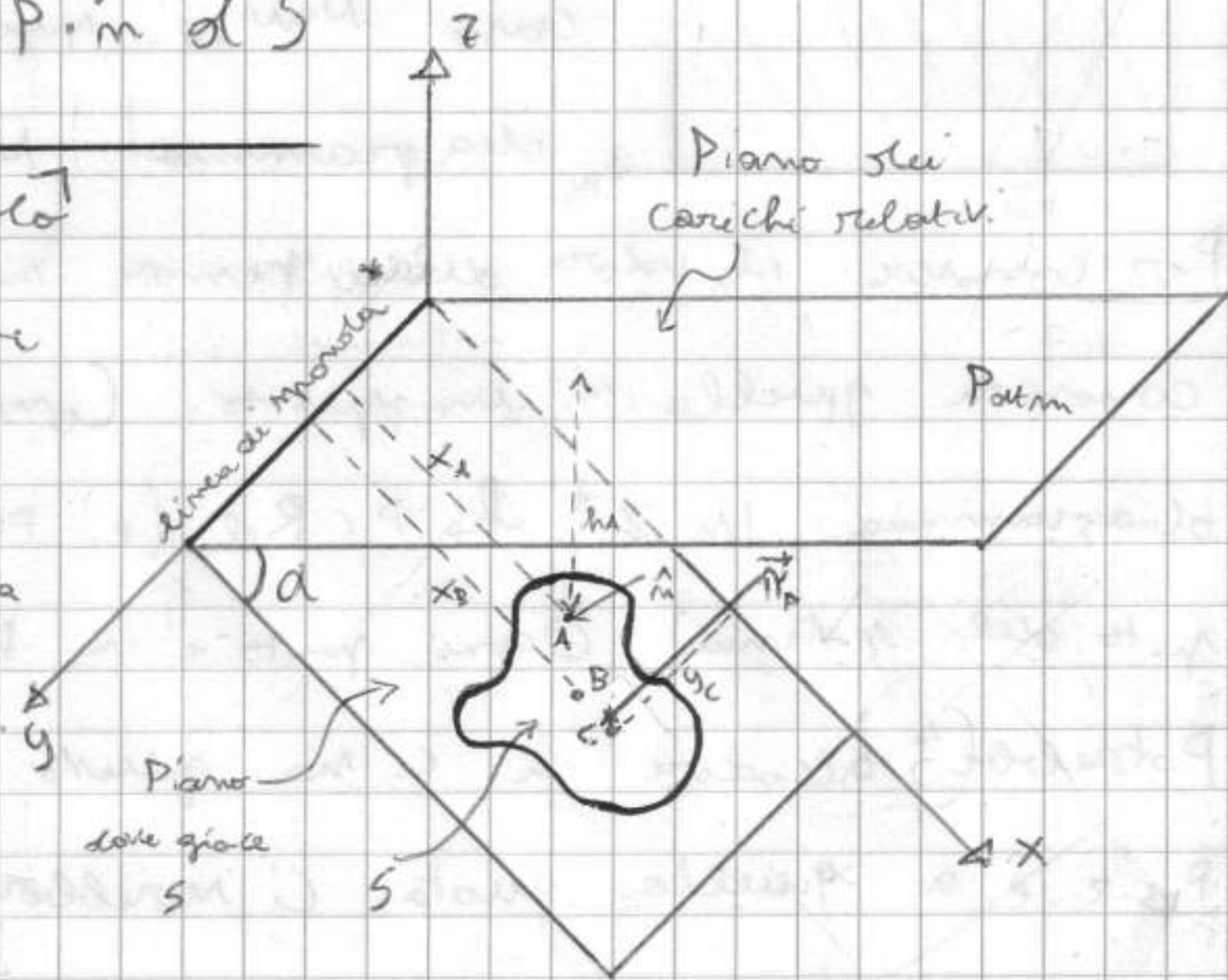


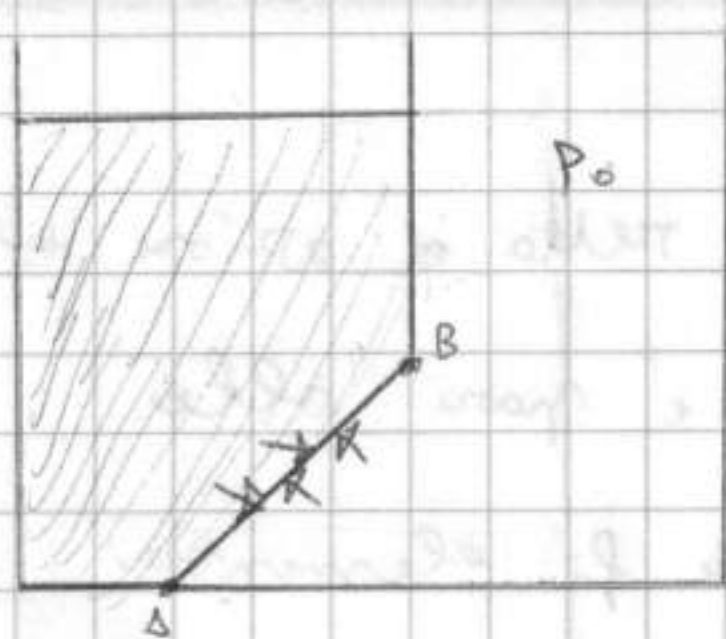
→ ex. forza su AB calcolo

con le P. totali. Ma a me
interessa qual è la F.

apparente a causa presenza acqua a certa
altezza. calcolo le x e le risultanti

e faccio la differenza. Ma mi
riferisco direttamente a P_{rel} + 1 calcolo.





Se affianco ho zona con q. a P_0 , in questo caso prendo le P_{rel} relative però a P_0 e non più a P_{atm} .
Non sempre scelta P_{rel} + comoda e P_{atm} .

(Cosa prima) Non è comune base ortogonale x, y, z . Scegli x, y a avere una comoda giacitura.

$$\vec{II}_P = \int_S P_{rel} \cdot \hat{n} dS$$

Perché sup. piana e semplice! Perché \hat{n} è costante in tutti i punti.

Porto \hat{n} fuori dall'integrale: $\hat{n} \int_S P_{rel} dS$. Posso dire che la spinta ha direzione di \hat{n} e ha modulo pari all'integrale di P , f. continua e lineare \Rightarrow x th. media ho $\vec{II}_P = \hat{n} \bar{P}_n S$

Qual è \bar{P}_n ? Poiché varia con legge lineare \bar{P}_n varia alla quota pari al valore medio delle distanze di S dal piano \rightarrow il BARICENTRO [B].

\bar{P}_n varia P_0 , la pressione relativa baricentrica. Posso dire che P generica relativa è γh_s (x il p.to S), quindi è integrale diventa $\hat{n} \int_S \gamma h dS$

Quindi $\vec{II}_P = \hat{n} \gamma h_B S$

Sia α l'angolo tra i 2 piani. Se calcolo X_B posso trovare l'integrale in una 3 forma: $\hat{n} \int_S \gamma \sin \alpha x dS = \hat{n} \gamma \sin \alpha X_B S$, attia x th. $\frac{M}{X_B S}$ è il momento statico DELL'AREA A RISPETTO ALLA SPONDA X , quindi

$$\vec{II} = \hat{n} \gamma \sin \alpha M$$

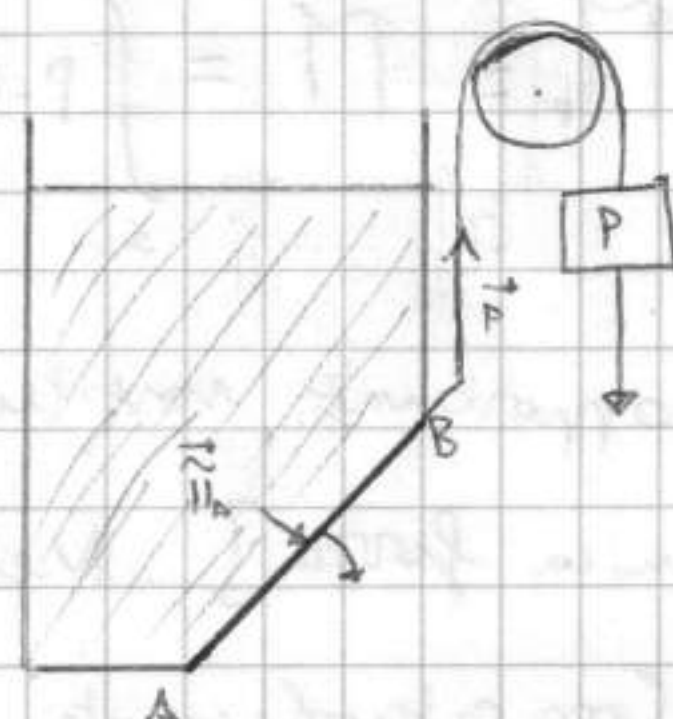
(comoda M si conoscono i dati geometrici)

Da un p.to di tecnico non basta la f. risultante; supponiamo che ΔB sia un portello interconnesso in A con peso in B. Calcolare il peso per aprire portello?

C'è momento delle forze rispetto al polo A. Devo sapere anche retta d'azione (CENTRO DI SPINTA).

Come trovare p.d'az.? Equilibrio momenti.

Non parto da \vec{II}_P ma dalla distribuzione di momenti degli spinti



elementari.

$$\int_S P \underbrace{\vec{x}}_{\text{mom. spinta particolare}} dS = \left| \vec{P}_p \times \vec{x}_c \right|$$

Quella forza avrà una retta d'azione tale che il momento risultante è pari alla risultante dei momenti delle f. elementari

[C può a caso, e' incognita da determinare; la retta azione risultante da un momento risultante di quella forza che è equivalente all'integrale dei momenti delle singole forze,

$$\left| \vec{P}_p \right| x_c = \int_S P x dS = \int_S \gamma \sin \alpha x^2 dS$$

Prendiamo la forza $\left| \vec{P}_p \right| = \gamma \sin \alpha M$; $(\gamma \sin \alpha M) \overbrace{x_c}^{\text{incognita}} = \gamma \sin \alpha \underbrace{I}_{\text{mom. d'inerzia di S lungo la spinta}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_c = \frac{I \int_S x^2 dS}{M \int_S x dS} \Rightarrow \boxed{x_c > x_B}$$

(distribuzione quadratica su distribuzione lineare)

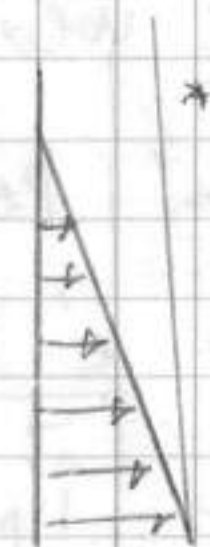
Il CENTRO DI SPINTA è sempre + basso del baricentro. Coincidono solo quando superficie piana e' orizzontale.

Poiché distrib. P varia solo verticalmente per la sup. ho:

* aumentando P.C.R., $x_c \rightarrow x_B$

Se però geometria non è simmetrica x_c non lo individuiamo con 1 sola

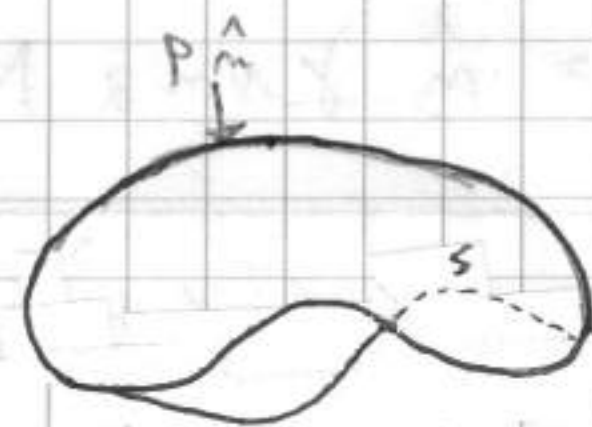
coordinata, ma serve anche y_c [si farebbe calcolo momenti anche rispetto a y_c]; avrai $\left| \vec{P}_p \right| y_c = \int_S \gamma \sin \alpha xy dS \rightarrow y_c = \frac{I_{xy}}{M}$



SPINTA SU SUPERFICI CURVE

28/10/2005

Cupola immersa in campo di pressione idrostatica.



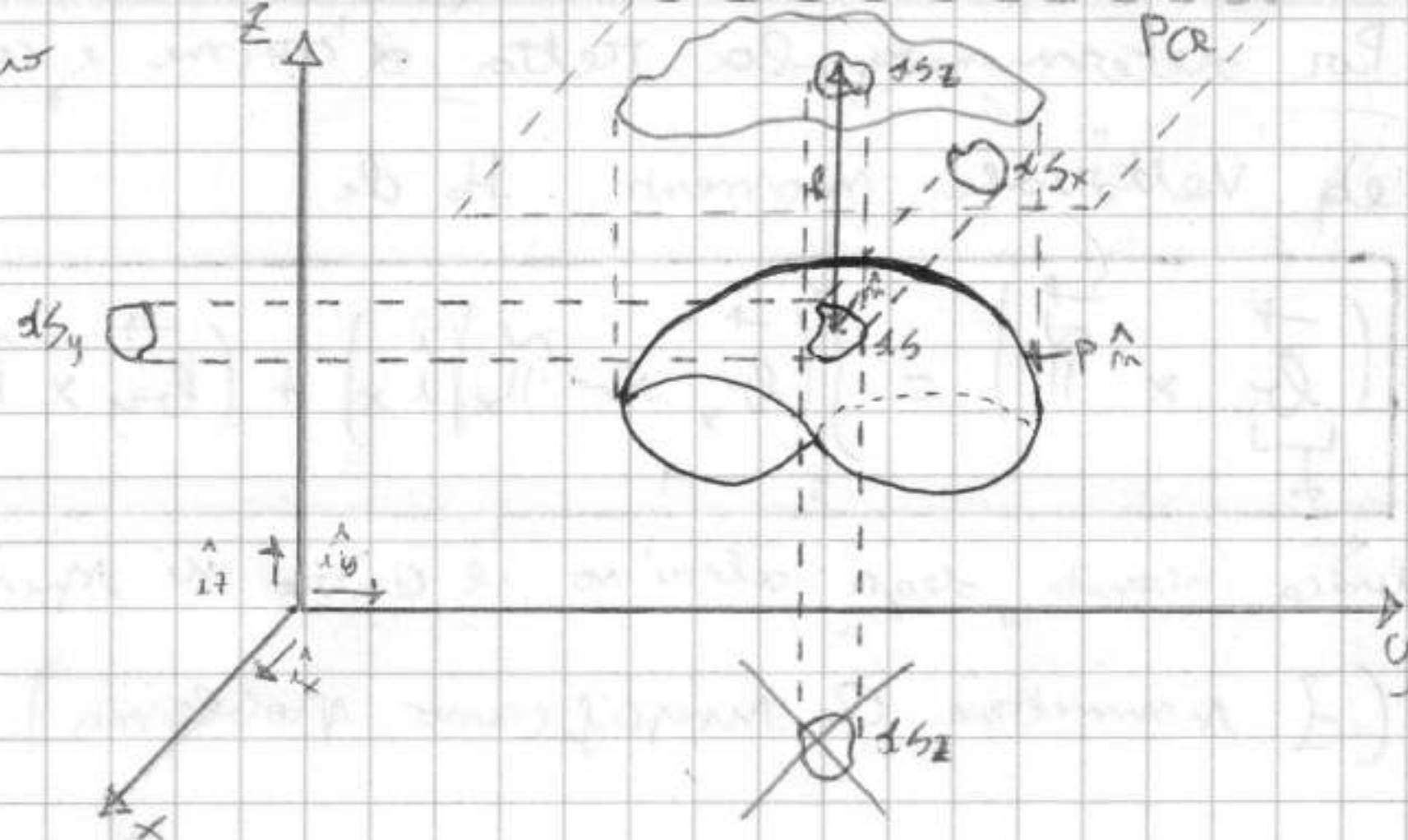
$$\vec{P}_p \equiv \vec{P} = \int_S p \hat{n} dS$$

È opportuno sostituire a distrib. puntuale una schema concentrata [unica forza]. Nelle sup. piane \hat{n} è costante, qui invece VARIA

Con continuità è uguale, e' però + completa l'applicazione.

Ci riferiamo a \mathbb{R}^3 e proiettiamo la relazione su 3 assi

$$X) \tilde{I}_x = \int_S P \hat{n} \cdot \hat{i}_x dS =$$



= [invece di $P \hat{n}$ interpretare

$\hat{n} \cdot \hat{i}_x dS$; Preso la generica

dS e farci il prodotto di $\hat{n} \cdot \hat{i}_x$ su $=$ PROIEZIONE SUPERFICIE su piano \perp a x .]

$$= \int_{S_x} P dS_x \rightarrow \text{Calcolo immediato} = \underbrace{P_{B_x}}_{\text{Proiezione nel piano } S_x} \cdot S_x \rightarrow \text{misura di } S_x. \text{ Ma cosa}$$

rappresenta la P in S_x ? E' la stessa cosa di P in $S \rightarrow$ proiezione su piano orizzontale non lo stesso.

$$Y) \tilde{I}_y = \int_S P \cdot \hat{n} \cdot \hat{i}_y dS = [\text{come prima, proiezione su } zx \rightarrow S_y] =$$

$$= \int_{S_y} P dS_y = P_{B_y} S_y$$

$$Z) \tilde{I}_z = \int_S P \cdot \hat{n} \cdot \hat{i}_z dS = \int_{S_z} P dS_z = P_{B_z} S_z. \text{ Ma qui non vale come prima.}$$

su proiezione piano \rightarrow c'è spostamento verticale e P VARIA.

Proiezione su piano $\perp z$ può essere fatta su piano qualunque \rightarrow lo

forciamo rispetto a P.C.R. la premessa su dS e' esprimibile come

colonna di approssimazione $= \gamma h$. Allora $\tilde{I}_z = \int_{S_z} \gamma h dS_z$. Ma $h dS_z$ e' proprio il volume del cilindroide $dS - dS_z$. Questo volume e'

molt. $\times \gamma \rightarrow$ e' l'area del CILINDRO RETTO che ha generatrici S e

P.C.R. e contorni le direzioni di S .

$$\text{Quindi } \tilde{I}_z = \gamma V$$



Scritte su superficie piano

$$|\vec{\tilde{I}}| = \sqrt{\tilde{I}_x^2 + \tilde{I}_y^2 + \tilde{I}_z^2}$$

con direzione

$$\vec{\tilde{I}} = \tilde{I}_x \hat{i}_x + \tilde{I}_y \hat{i}_y + \tilde{I}_z \hat{i}_z$$

Per determinare la retta d'azione e centro di spinta \vec{P} devo risolvere eq. vettoriali momenti. Ho che:

$$\left(\vec{r} \times \vec{P} \right) = \int_S \left(\vec{r}_x \times \tilde{P}_x \hat{i}_x \right) + \left(\vec{r}_y \times \tilde{P}_y \hat{i}_y \right) + \left(\vec{r}_z \times \tilde{P}_z \hat{i}_z \right) dS$$

Unica incognita, scegli altrimenti il centro di spinta. 3 eq e 3 incognite.

([simmetrie che semplificano problema])

Soluzione visto a partire da distribuzione continua spinta.

Ex. Canone con colotta semisferica.

Voglio risultante spinta sulla

superficie della colotta.

$$\tilde{P}_x = P_{B_x} S_x \quad \text{Proietta}$$

colotta su xy , ma in

minifera ci sono 2

elementi proiettati [con

convi opposti] \rightarrow Per simmetria la S_x è nulla [contributi si annullano,

anche per la pressione $\Rightarrow \tilde{P}_x = 0$.

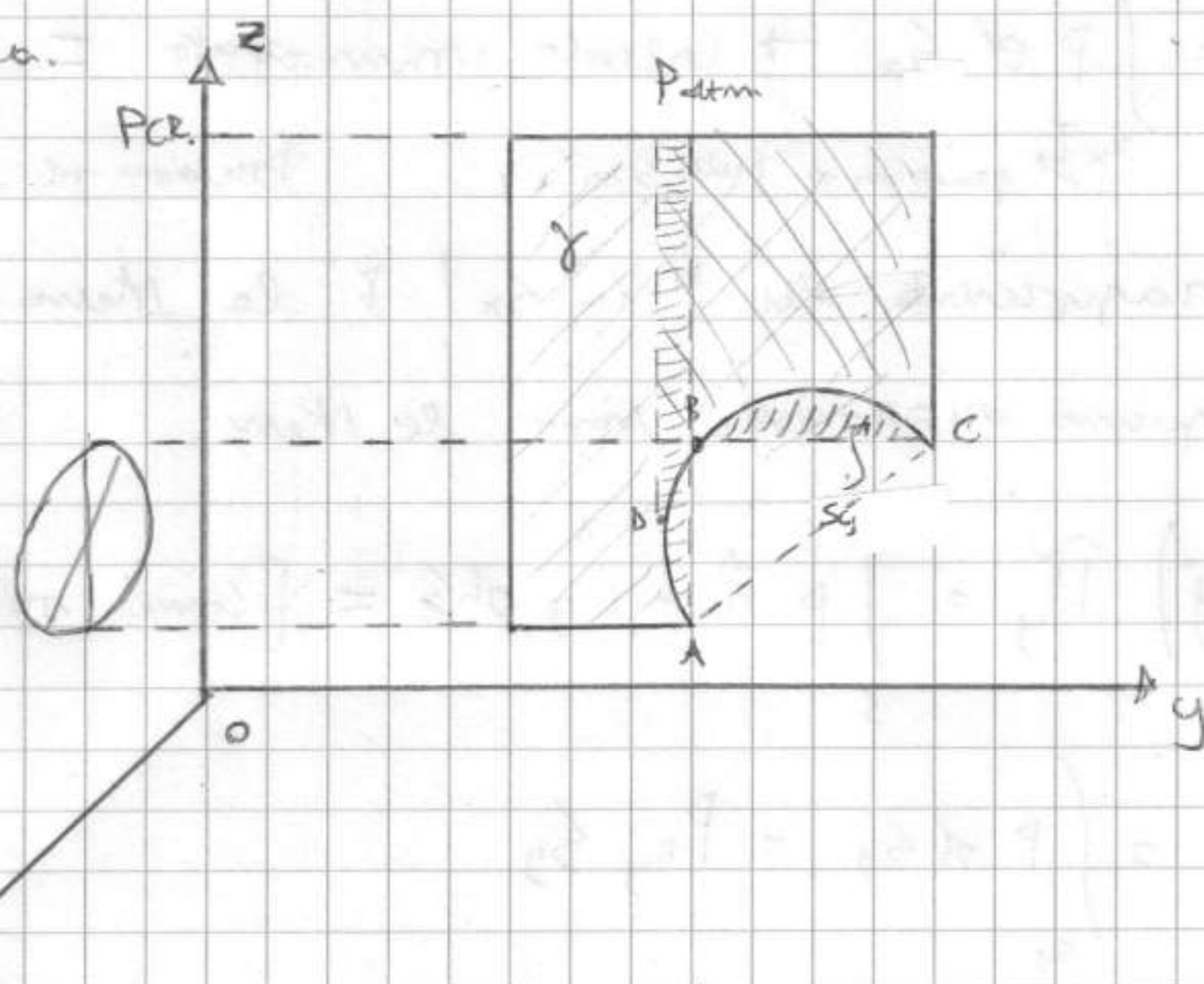
- \tilde{P}_y , questa zona S_y ha simmetria. Unico contributo \tilde{P}_y è il resto
di colotta proiettata su xz [AB]. Proiettando si ottiene ELLISSE

$$\tilde{P}_y = P_{B_y} \cdot S_y$$

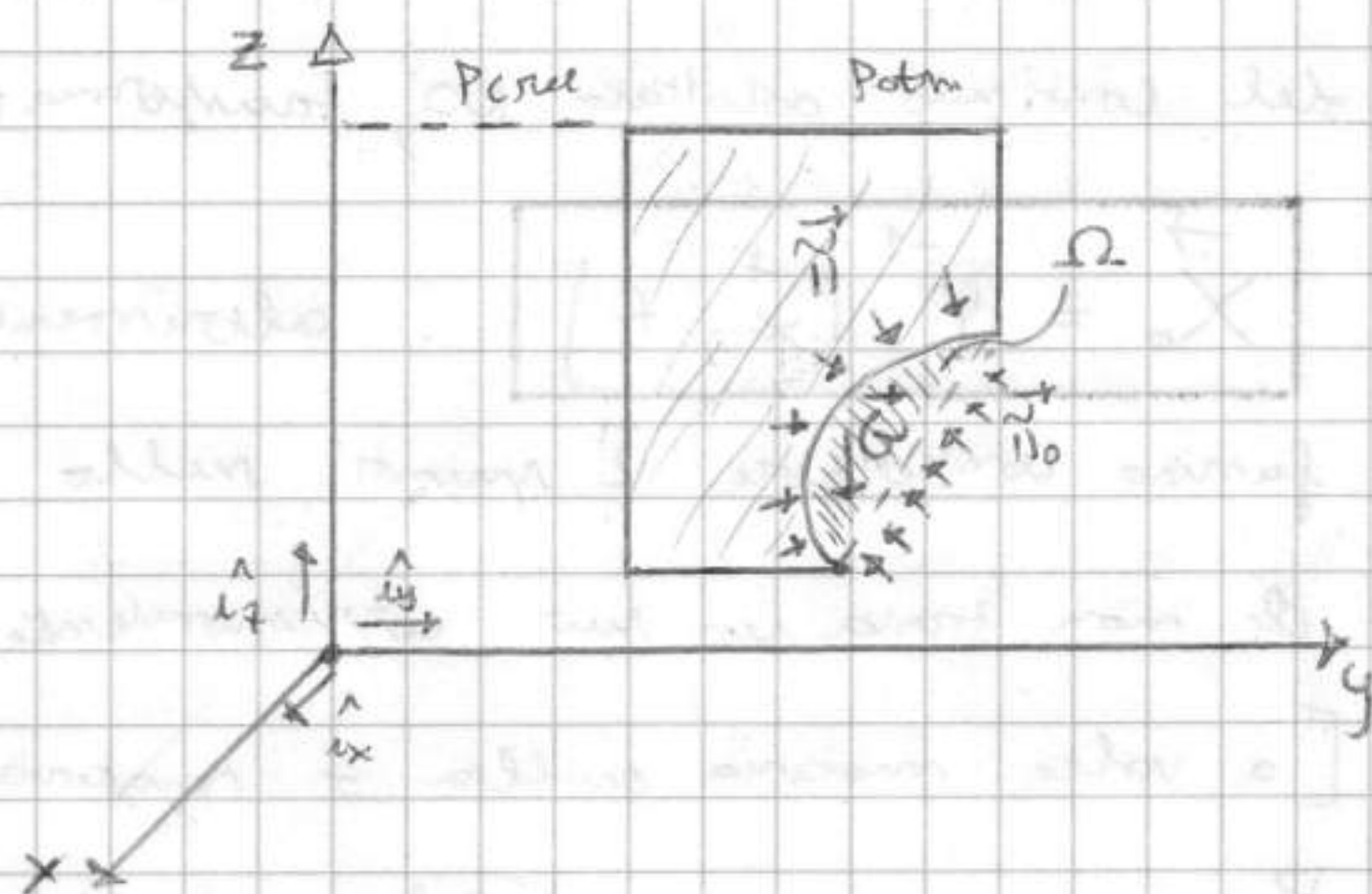
- \tilde{P}_z ; c'è parte superficie [AB] che ha simmetrie rispetto a z ma non
c'è simmetria del campo di pressione. Divido superficie in 2 proiezioni /
hanno lo stesso segno del coseno proiettante [AD, DC]. Convi. per cilindro
AD che sta contributo segno + e quello su DC che ha segno -.

C'è parte del contributo che si elide [parte sovrapposta], e

③ resto è \tilde{P}_z .



Amplifichiamo stesso problema. Si può essere $\vec{G} + \vec{\Pi}_p = 0$ che può
 volere in un volume chiuso, invece qui
 c'è superficie aperta. Se con pochi
 piani determino V. chiuso allora
 è contenente. → in questo caso c'è il
 volume della superficie. $[\partial V \text{ chiuso}]$
 ha come parte superficie di colata]



Applico a Ω l'eq. di equilibrio. (sto immaginare che Ω è immerso
 al contorno con un campo di pressione = a quello sotto → acqua è
 sovrapposto con stessa P. Quindi V liquida $\in \Omega$ non si muove Ω .

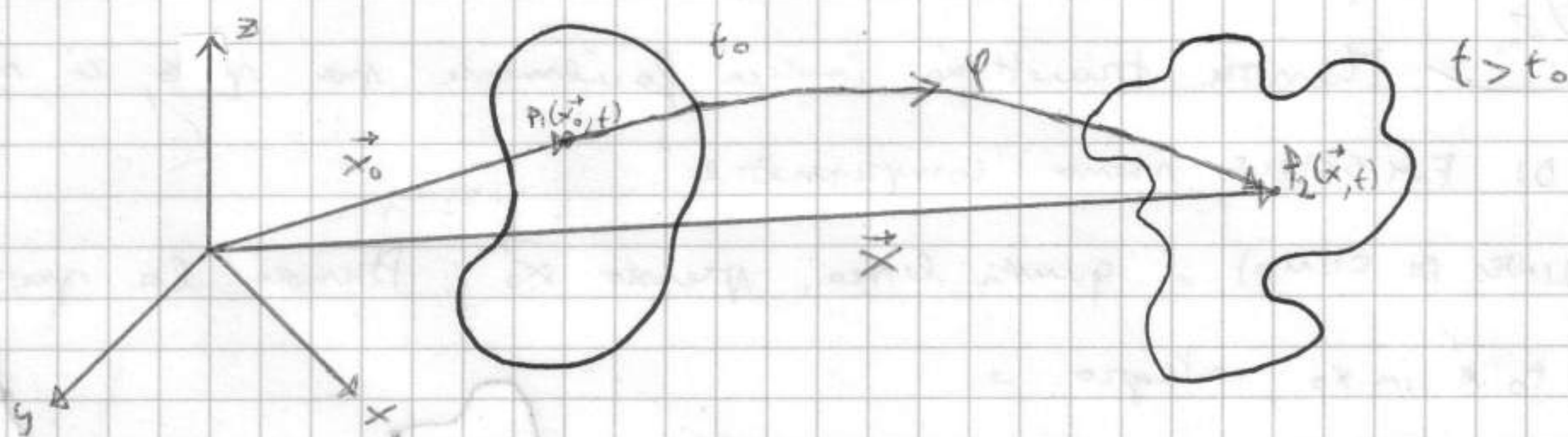
\vec{G} è risultante peso fluido in Ω , mentre $\vec{\Pi}_p$ è la risultante delle
 pressioni su TUTTA la sup. chiusa. Dico che $\vec{\Pi}_p = \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_L$ dove
 $\vec{\Pi}_L$ è la mia incognita $\vec{\Pi}$.

Risolto quindi eq. globale: $\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{\Pi}_0 = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = -\vec{G} - \vec{\Pi}_0}$

\vec{G} è peso di V e $\vec{\Pi}_0$ è risultante spinta su piano separante dovuto peso
 non a Patm ma a P. (Come se tutto fosse immerso).

Derivazione CINEMATICA sistema materiale.

4/11/05



Sistema a t_0 contenuto in certo dominio che a certe linee è variato.

Come osservare questa evoluzione spaziale?

Ho già cinematica in t_0 materiale. Qui ce ne sono due ai quali
 possiamo applicare lo stesso schema derivato della meccanica del p.t.

RIFERIMENTO LAGRANGIANO

Punto $P(x_0, t_0)$ e osservando sua evoluzione ho $P(x, t)$. Cinematica
 è nota quando ho relazione che lega P_1, P_2 : $x(t) = \varphi(x_0, t)$

Relazione che mi dice la nuova posizione dello stesso p. mat.

Ma φ può essere una qualunque del. matematica! Nello schema del continuo adottato NO, trasformazione deve essere BIUNIVOCA e INVERTIBILE.

$$\vec{X}_0 = \varphi^{-1}(\vec{x}, t)$$

altimenti includere anche trasformazioni che fanno convergere 2 punti nello stesso punto o viceversa un punto che non trova un suo corrispondente nell'insieme di partenza.

[a volte materia nulla o materia ∞ IMPOSSIBILE]

Prima grandezza di riferimento di solito è la VELOCITÀ:

$$\vec{V}[\vec{x}(t), t] \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} \equiv \frac{d[\varphi(\vec{x}_0, t)]}{dt}$$

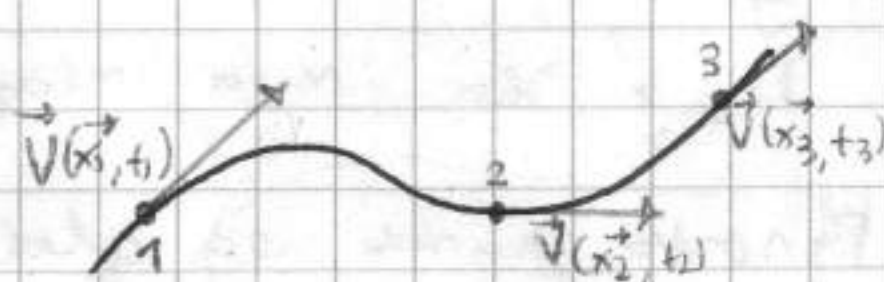
Variatione spaziale rispetto al tempo (relativa a quel p.to materiale)

Come rappresentare questo campo di velocità? Tramite LINEE TRAIETTORIE:

si ottiene integrando \vec{V} per le c.i. $[\vec{x}_0, t_0]$. Successione posizioni da

TRANSITORIA. Derivare come si muove il p.to

materiale, la sua traiettoria. Proprietà che



\vec{V} p.to la velocità nel p.to e in quell'istante è tangente a linea.

È possibile avere linee che si intersecano perché particelle possono

passare nello stesso punto in ISTANTI DIVERSI.

Mentre traiettoria indica facilmente per punto, ci sono invece le

LINEE DI EMISSIONE, meno "comparabili".

↳ (o LINEE DI FLUSSO) è questa linea, prendo \vec{x}_0 . Prendo la particella

che a t_1 è in \vec{x}_0 , integro e

ho per finale. Poi prendo

t_2 altra part. che parte



almeno da \vec{x}_0 , ma solo istante t_2 è integrato. Ho altra traiettoria.

Proseguo fino a t_n . Nell'integrazione x tutte mi fornirò a $t > t_n$.

Alla fine ho posizioni di tutte particelle partite da \vec{x}_0 a tempo t .

Unendo ho linea di emissione, in generale non \equiv con nessuna traiettoria.

Un modo di visualizzare il campo cinematico avviene con linea

emissione, ottenibile facilmente. Emesso ad ex. da \vec{x}_0 delle particelle

Colorate queste lanciano traccia e vedo a certo istante evoluzione.

Importante è anche l'ACCELERAZIONE

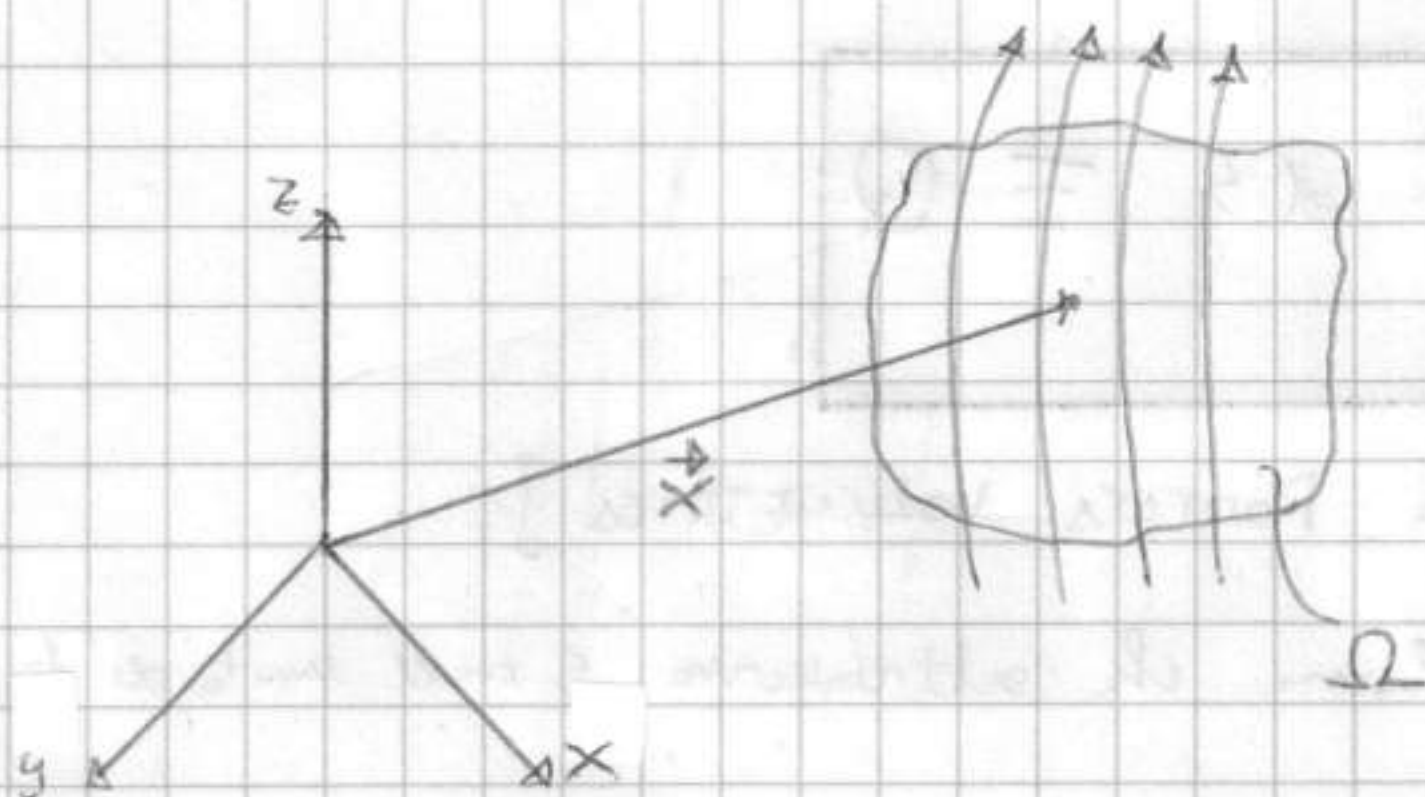
$$\vec{A}[\vec{x}(t), t] \equiv \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2 [\ell(\vec{x}_0, t)]}{dt^2}$$

Tanto totale di variazione del campo di velocità.

Questa derivazione segue l'evoluzione delle PARTICELLE: questa schematizza a che fare con sistemi che si modificano nel tempo. Problema

gli sistemi con sistemi che variano nel tempo. Eulero propone altro p.t. di vista.

RIFERIMENTO EULERIANO



Attenzione finita nei p.t. geometrici di \mathbb{R}^3 . \vec{x} a data t . Se in \mathbb{R}^3

gamma del fluido [campo di moto che occupa spazio] allora vedo la velocità di \vec{x} quando lì passa

una particella. Si introduce il campo di velocità $\forall \vec{x} \in \Omega, \forall t > t_0$

$\vec{V}(\vec{x}, t)$. Punto riferito a DOMINIO FISSO nel tempo, mi riferisco ad un VOLUME di CONTROLLO. Ovviamente $\vec{V}[\vec{x}(t), t] = \vec{V}(\vec{x}, t)$

per lo stesso punto nello stesso istante.

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad [\text{eq. parametrica}] \rightarrow \text{LINEE DI CORRENTE}$$

Sembra linea traiettoria, ma quella era Moria

Cinematica particella, questa è evoluzione a certo

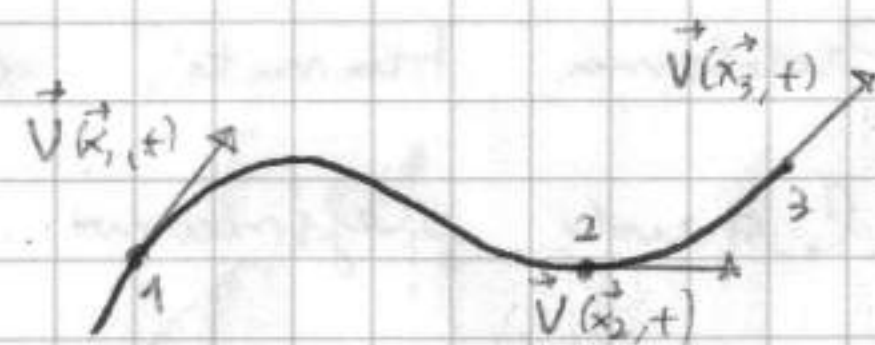
istante t . LDC ora istantanea del C.V. traiettorie non fotografabili.

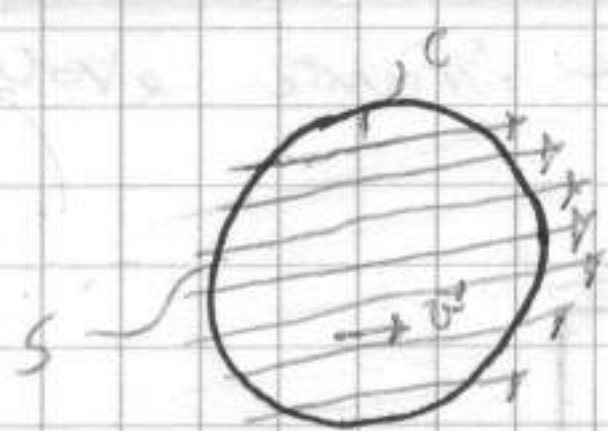
Con più linee di corrente, però, non si può avere interruzione, e'

flusso nello stesso istante.

In generale LI, LE, LC non \equiv .

LC definiscono utile entità cinematica.





Conr. stazionario e LC che attraversano

Ho il TUBO su FLUSSO, fluido all'interno del TdF si muove

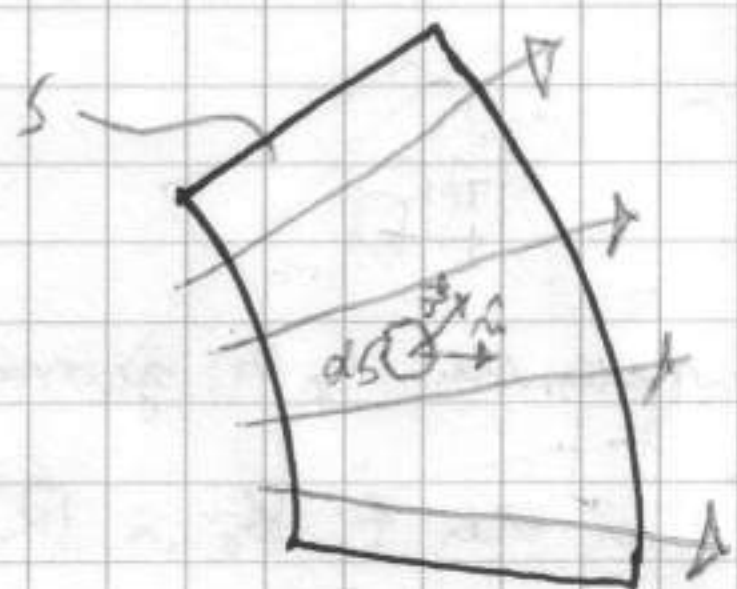
nella sua evoluzione sempre al suo interno, $\forall P \in TdF$, \vec{v} è tangente

$\vec{v} \perp$ che fa entrare e uscire particelle; contiene sempre stesso q. di m.

[Fluido fluiva in TdF su AREA $\frac{1}{\infty}$]

PORTATA

(sia sia in una $\vec{V}(x,t)$). Dato $\vec{V}(x,t)$, introduco nuova grandezza.



S attraversata da fluido. Prendo un'area

$\frac{1}{\infty}$ m S / da avere \hat{n} . Allora

$$\int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dS \equiv Q$$

[il flusso di \vec{V} attraverso S è la PORTATA VOLUMETRICA]

$[Q] = L T^{-1} L^2 = L^3 T^{-1}$ Volume che attraversa S nell'unità di t.

ha PORTATA di MASSA e' quanta materia attraversa quella sup.

$$Q_m = \int_S \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dS, [Q_m] = L^3 T^{-1} M L^{-3} = M T^{-1}$$

[accelerazione non è $\frac{d\vec{v}}{dt}$ con \vec{v} definita in questo riferimento]

Problema tramite derivazione lagrangiana $\vec{x}(t) = \varphi(x_0, t)$ (per 7/11/05)

il quale definiamo $\vec{V}[\vec{x}(t), t]$ e tramite deriv. euleriana riferita

a posizione spaziale alla quale associare la velocità $\vec{V}(\vec{x}, t)$. Hanno

elementi in comune. Per il generico istante t se $\vec{x}_p(t) \equiv \vec{x}$ allora

i due \vec{V} coincidono: $\vec{V}[\vec{x}(t), t] = \vec{V}(\vec{x}, t)$. E' allora possibile

derivare? Ex accelerazione! Prendo $\frac{d\vec{V}[\vec{x}(t), t]}{dt} \equiv \vec{A}$. E' ovvio

che questa accelerazione è definita da $\frac{d\vec{V}(\vec{x}, t)}{dt}$ (anche matematicamente)

come un'accelerazione. Dunque, esprimiamo \vec{A}

(38) (\rightarrow)

$a_n \equiv \frac{dV_n}{dt}$ ^{elemento n-esimo del campo di velocità} \rightarrow applico regole derivazione: $= \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{\partial V_n}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$ ^{si dipende implicitamente da t}
 $= \frac{\partial V_n}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_n}{\partial x_j}$ ^{forma (normalizzando) vettoriale tutti i termini} $\rightarrow \nabla \cdot \vec{V}$ ^{cost. j della particella}

$$\vec{A} \equiv \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

Se nel calcolare \vec{A} uso la formula gli questi contributi nello \vec{V} nel

ref. euleriano [che coincidono] Se derivavo lo \vec{V} in euler. avrei avuto

solo $\frac{d\vec{V}}{dt}$ avrei ignorato esattamente 2 contributi.

$\frac{d\vec{V}}{dt}$ \downarrow ACCELERAZIONE LOCALE ; $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ = ACCELERAZIONE CONVETTIVA

Accelerazione e' derivazione del campo su var. velocità materiale nel tempo.

La V. di una particella può cambiare che quando passa, in cambiano condizioni a contorno, nel $t+dt$ può cambiare. [ex. se anche e' fermo ma riceve spinta dall'esterno \rightarrow Acc. loc.]

Particella che passa in x, tende - sotto effetto U - a muoversi in altro punti dove \vec{V} cambia, nel movimento si muove solo la U e' su Vero [Acc. conv] legato alla velocità della particella e ai gradienti spaziali.

In generale possiamo definire una grandezza fisica qualunque \mathcal{F} associata alla particella (ex. p, m, \vec{p} ...) della quale si può fare derivazione di grandezza materiale $\mathcal{F}[\vec{x}(t), t]$ V prop. fisica introdotta. Se voglio vedere come varia nel tempo $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, scriverei

(con tutti passaggi di prima) a $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \mathcal{F}$ \rightarrow sicuramente c'è $\nabla \mathcal{F}$ ma rimane campo velocità: $\rightarrow = \vec{V} \cdot \nabla \mathcal{F}$. Si usa simbologia:

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla)}_{\text{operatore convettivo}} (\cdot) \leadsto = \boxed{\frac{D(\cdot)}{Dt}}$$

^{qualora grandezza} Derivata TOTALE MATERIALE \rightarrow SOSTANZIALE

1 Regime di moto distinguibile da natura accel.

(\rightarrow)

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

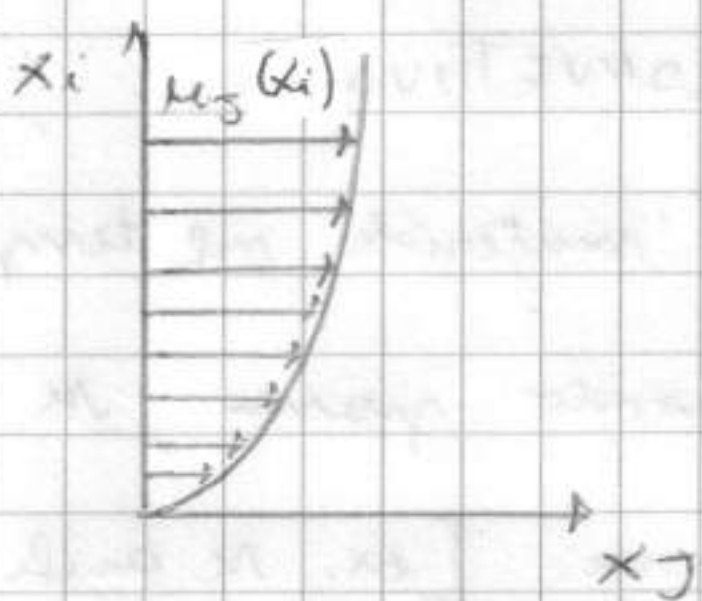
- Se $\vec{A} \neq 0$; $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0$; $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \neq 0$ ho il moto più complesso:

MOTO VARIO

- Se $\vec{A} \neq 0$; $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$; $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \neq 0$. Moto accelerato a causa solo di una variazione convettiva. MOTO STATIONARIO e PERMANENTE

Cond. nec. è che le condizioni al contorno siano costanti nel tempo

- Se $\vec{A} = 0$ ho MOTO UNIFORME $\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \wedge \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = 0 \right]$. Ma non è moto + semplice. Possu avere $\vec{V} \neq 0$ e $\nabla \vec{V} \neq 0$. Attesa:



C'è un gradiente, $\nabla \vec{V} \neq 0$, $\vec{V} \neq 0$ ma non sono in p.v. Particella qui non si muove istantaneamente (dove c'è $V < >$) ma si muove verso luoghi dove \vec{V} non cambia.

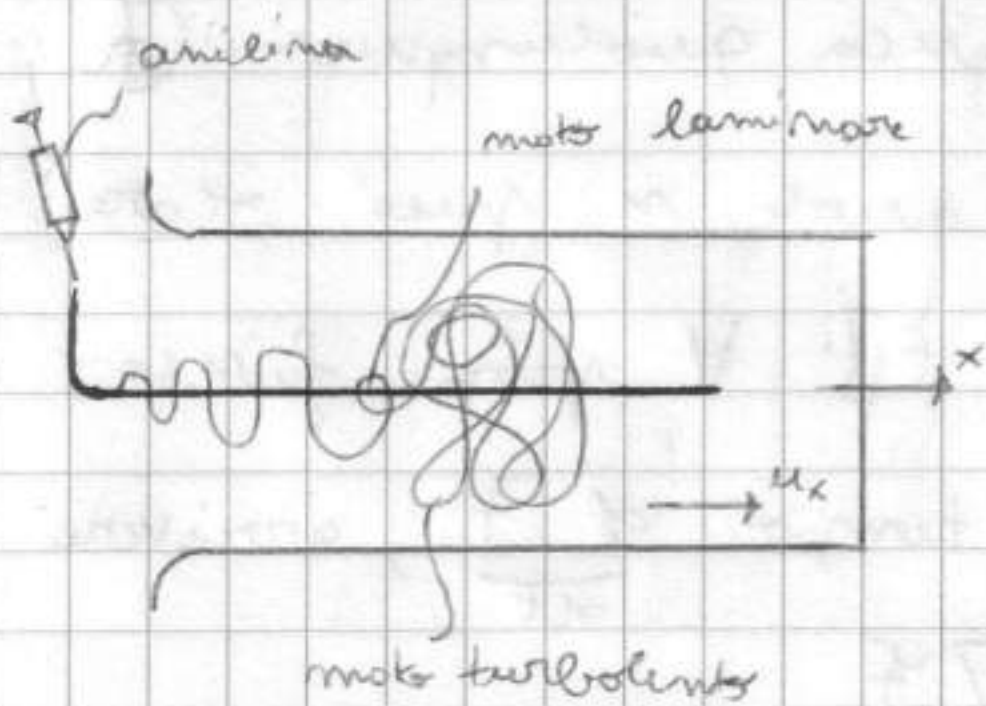
- Se $\vec{A} = 0$; $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$; $\nabla \vec{V} = 0$: è il moto uniforme del corpo rigido. MOTO UNIFORME OMogeneo [ex. bicchiere d'acqua che si muove]

Sistemi fluidi possono avere cond. di moto TURBOLENTO.

(1860)

Esperimenti di Reynolds

Pieno tubo alimentato con portata costante; + un fluido newtoniano



x visibile come linea di emissione più colore

Moto delle particelle era rettilinea regolare

Verso la parete era + lenta, distribuzione

PARABOLICA [max al centro, nullo alle pareti.]

In certi casi però non c'è corrispondenza

[un'evoluzione acqua e glicerina x variare viscosità; variò diametri; etc]

Amelina non aveva evol. regolare [ovallata e poi si DISPERDEVA]; transitoria

casuale, caotica. I moti regolari li chiamo "MOTO LAMINARE", ie

chiamo "MOTO TURBOLENTO". Modello teorico \neq esperimento x particolari

condizioni. Trovo parametro che distingue i due moti:

36) Sistema è dominato da forze (di inerzia, peso, etc). Rey. considero'

le forze viscosi. Dime che F_i erano proporzionali a massa di nave

$F_i = d \rho D^3 U \frac{dU}{dt}$ a alla ρ del fluido e al volume del sistema

che dipende ad ex. dal diametro. Massa di glo

accelerazione [VELOCITA' MEDIA: media SPAZIALE; $U \equiv \frac{Q_{\text{portata volumetrica}}}{A}$ ^{area}]

$[a \propto \frac{U}{T} = U/(D/U) = U^2/D]$, quindi $F_i \propto \rho D^2 U^2$, mentre le

forze viscosi dip. dalla viscosita' dinamica, viscosita' e area

$F_v \propto \mu \frac{U}{D} D^2 \rightarrow \mu U D$. Se faccio il rapporto $\frac{F_i}{F_v}$ rispetto

alle scale caratteristiche ho che $\frac{F_i}{F_v} \propto \rho \frac{U^2 D^2}{\mu U D} = \frac{UD}{\nu} \rightarrow$ NUMERO DI REYNOLDS

e' il parametro che determina se moto e laminare o turbolento.

Quando $Re < Re_{critico}$, $\forall U, D, \nu$ moto e laminare

" " $Re > Re_{critico}$ si ha moto turbolento

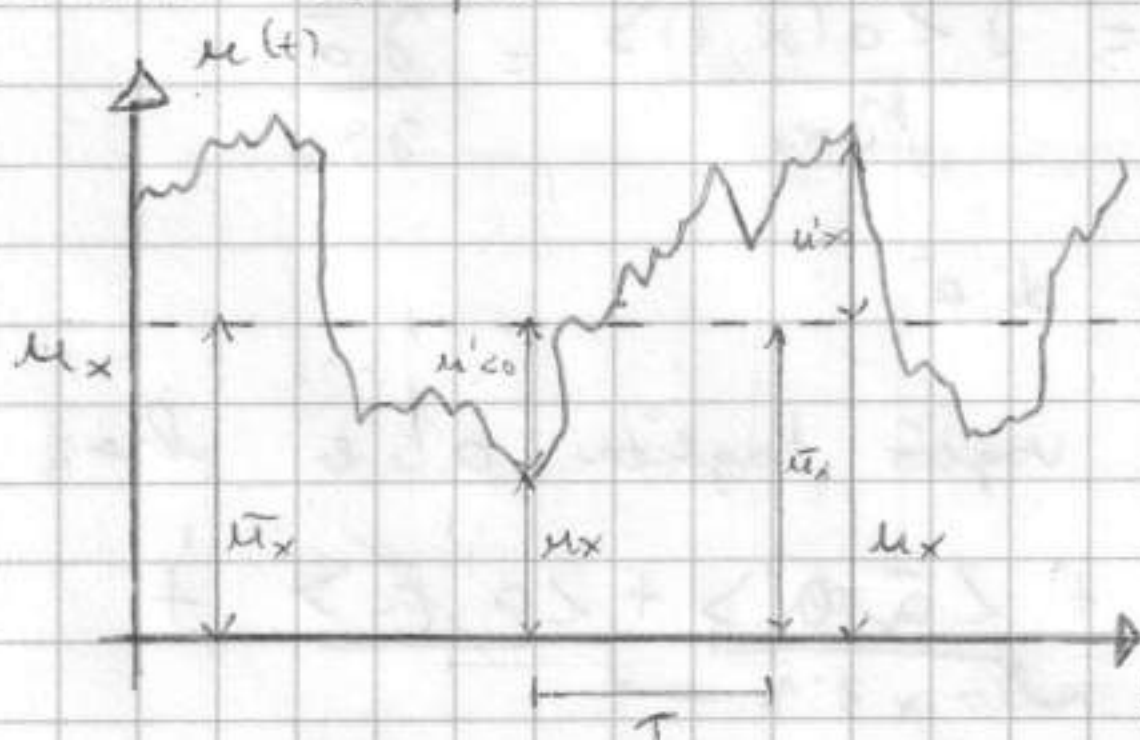
Quando le forze di inerzia sono $<$ forze viscosi, moto e laminare.

[e' imp. avere condizioni perfette, ci sono sempre perturbazioni, ex piccole rugosita', rugosita' condotto, etc... In P.L. vengono smorzate, in m. t.

Vengono AMPLIFICATE]

Se ho $Re > Re_{crit.}$ la se cond. a contorno sono costanti nel tempo

ho complementamente stessa portata in uscita. Cond. mitt. rif. \rightarrow e u_x



In queste cond. ho questo andamento.

Andamento casuale, ma le grandezze oscillano intorno a valore medio che rimane costante

Matematicamente $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T u_x dt = \bar{u}_x$ COSTANTE

[importante nota se cond. a contorno non stazionarie] Questo campo di

velocita' e' composto da 2 termini. $u_x = \bar{u}_x + u'_x$ ^{PREV. ISTRUMENTI} ^{COMPONENTE FLUTTUANTE}

che \propto del tempo.

Si dimostra che $\bar{u}_x \approx \frac{1}{T} \int_T u_x dt$ perche' T ha null. grande rispetto a fenomeni turbolenti

(deve contenere storia delle turbolenze) o anche grande

rispetto a scala dei tempi [ex. turbolenza stazionaria]

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \underbrace{\vec{V}(\vec{x})}_{\text{grandezza turbolenta}} + \underbrace{\vec{V}'(\vec{x}, t)}_{\text{grand. media}} \quad ; \quad \vec{V}(\vec{x}) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{V}(\vec{x}, t) dt \approx$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \vec{V}(\vec{x}, t) dt = \langle \vec{V} \rangle \quad \text{Se campo è turbolento tutte le grandezze di campo sono turbolente}$$

(oscillazioni di frazioni di secondo \leadsto T ordine di qualche secondo)

Decomposizione vale \forall campo: $a = \bar{a} + a'$, $a' = a - \bar{a}$. Se ne faccio la media ottengo [l'operatore lineare integrale] $\langle a' \rangle \equiv \langle a \rangle - \langle \bar{a} \rangle = \bar{a} - \bar{a} = 0$ (essendo $\langle \bar{a} \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{a} dt = \bar{a}$) \Rightarrow media temporale della grandezza fluttuante è identicamente nulla.

Con notare qualunque in un campo di moto turbolento, decompongo



e ho \vec{V} che non varia nel tempo
e \vec{V}' che fluttua, ma questa parte non ha contributo in media al flusso

Senza di moto turbolento, in media temporale, è come se non ci fosse. Da questa decomposizione di Reynolds ho le seguenti proprietà:

$$\langle \bar{a} \rangle = \bar{a} \quad ; \quad \langle a' \rangle = 0 \quad ; \quad \left\langle \frac{\partial a(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle a(\vec{x}, t) \rangle}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i}$$

la media del ∇a calcolo la ∇ direttamente di \bar{a}

Se ho il prodotto tra 2 grand. turbolente voglio togliere a' e b' ho:

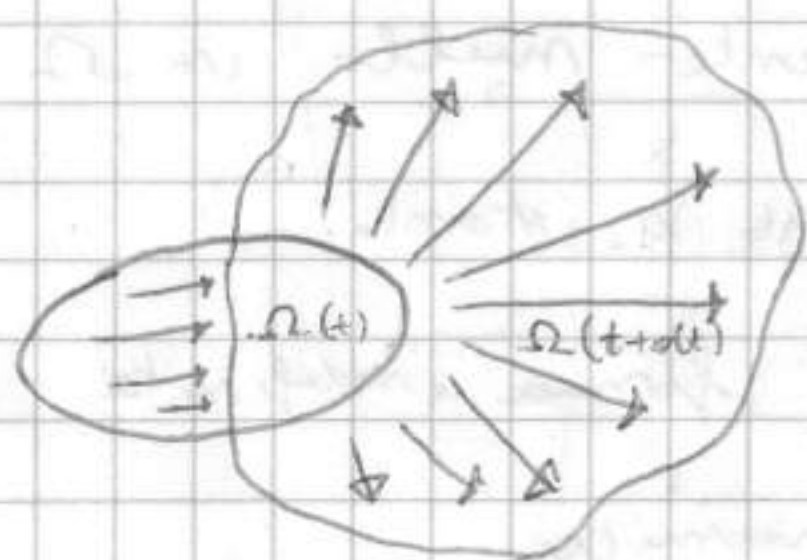
$$\begin{aligned} \langle a b \rangle &= \langle (\bar{a} + a')(\bar{b} + b') \rangle = \langle \bar{a} \bar{b} \rangle + \underbrace{\langle \bar{a} b' \rangle + \langle \bar{b} a' \rangle}_{\text{media } \times 3 \cdot n.} + \langle a' b' \rangle \\ \langle a' b' \rangle &= (\text{con la 2. proprietà}) = \bar{a} \bar{b} + \underbrace{\langle a' a' \rangle}_{\text{non posso dire che è nullo}} \\ \Rightarrow \langle a b \rangle &= \bar{a} \bar{b} + \langle a' b' \rangle \end{aligned}$$

[a' è nome o di var. dimensionali; la media in un ΔT è nulla, il prodotto no!] Anche con turbolenza stazionaria, se $\bar{a}' = 0$ non vuol dire che è trascurabile. Se nelle eq. si maniche compare $\langle a b \rangle$

anche con la media si mangiano le tracce di a' e b' .

TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS

[conseguenza del rif. euleriano] C'è sistema fluido in dom. chiuso



e supponiamo ad esse associata una grandezza materiale di campo $\gamma[\vec{x}(t), t]$, Voglio sapere grandezza nel dominio: $\int_{\Omega} \gamma[\vec{x}(t), t] d\Omega$

Poi mi interesso anche la derivata totale risp. al tempo.

$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \gamma[\vec{x}(t), t] d\Omega$, Se mi trovo in un sistema che si modifica nel tempo ho

perante certa computazionale Rey, dimostro che:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \gamma[\vec{x}(t), t] d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{D\gamma}{Dt} + \gamma \nabla \cdot \vec{v} \right) d\Omega \quad \text{1. formulation}$$

Importante passaggio a integrazione su dominio fisso. Applicando alcuni passaggi si usano altre forme del teorema. Si sviluppa fuso.

integrale. Sappiamo che $\frac{D\gamma}{Dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \gamma$. Sostituendo

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \gamma \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma \vec{v}) \right) d\Omega \quad \text{2. formulation}$$

ha 3. form. si deriva dalla 2.

(applicando th. divergenza)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \gamma}{\partial t} d\Omega - \int_{\partial \Omega} \gamma \vec{v} \cdot \hat{n} d(\partial \Omega) \quad \text{3. form}$$

Variatione locale di γ - il φ di $\gamma \cdot \vec{v}$ attraversa la frontiera di Ω .

Si può vedere variatione rispetto a φ entrante o uscente

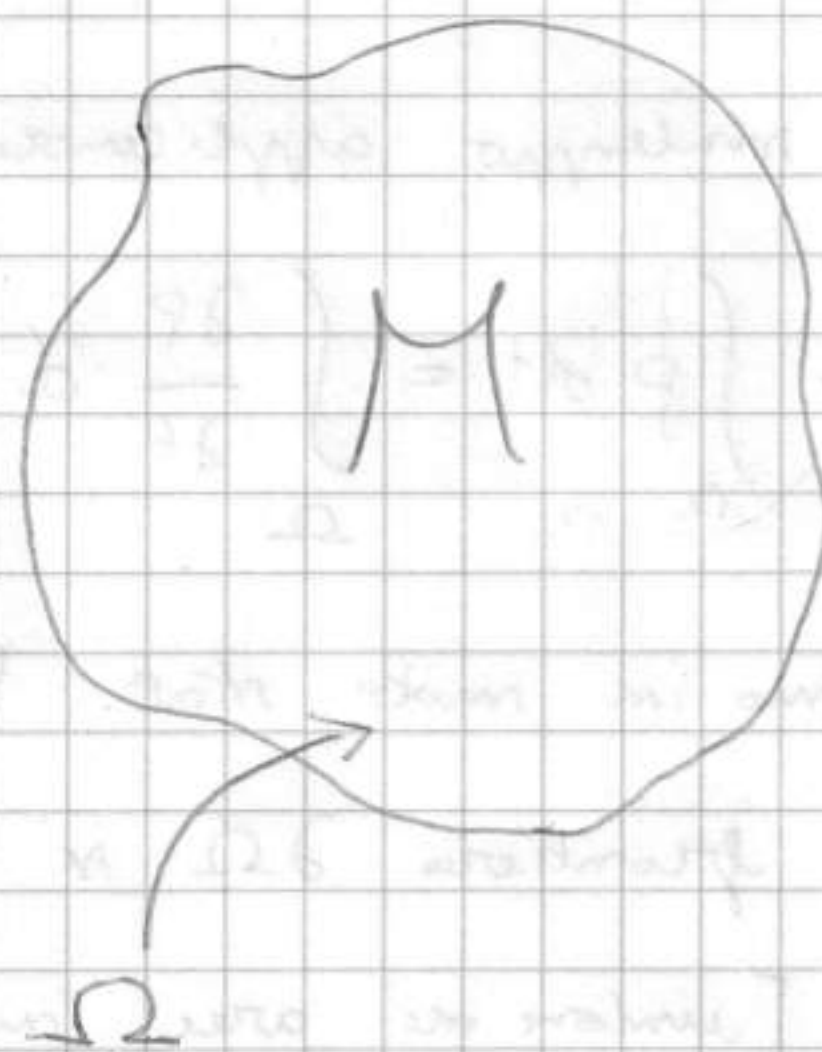
Cons. sistema fluido in dominio Ω con

certa massa di fluido, con $M = \int_{\Omega} \rho d\Omega$.

La $M \subset \Omega$ è / \forall evoluzione dinamica

essa si conserva $\Rightarrow \frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0$

In genere $\Omega = \Omega(t)$.



Applicando TST si ha che
$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} p \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{V} \right) d\Omega = 0$$

Se $\rho = \text{cost} \, \forall \, \Omega \Rightarrow$ funz. integranda è identicamente nulla in $\Omega \rightarrow$

$$\boxed{\frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{V} = 0}$$
, vera p.t.s x p.t.s, istante x istante
 \rightarrow EQUAZIONE DI CONTINUITA' in forma infinitesimale

Assolutamente da tutti i sistemi \forall evoluzione dinamica.

Fluidi incompressibili: $\rho = \text{cost} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{V} = 0}$ \rightarrow campo di \vec{V} è a divergenza nulla, solenoidale

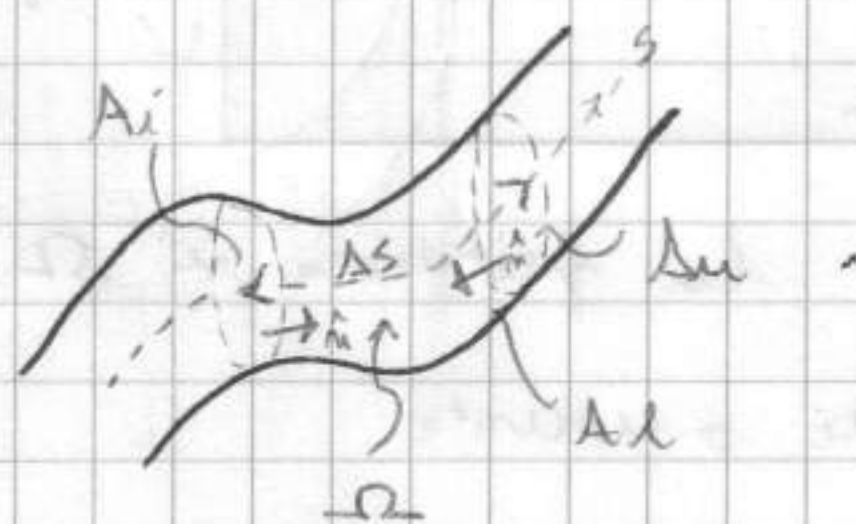
\rightarrow in queste condizioni Ω controlla la sua massa; può deformarsi ma volume deve rimanere costante. [principio di conserv. del "volume"]

Sia definita una φ definita in Ω per unità di massa.

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} p \varphi \, d\Omega} = \int_{\Omega} \left(\frac{Dp\varphi}{Dt} + p \varphi \nabla \cdot \vec{V} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[p \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \frac{Dp}{Dt} + p \varphi \nabla \cdot \vec{V} \right] d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left[p \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \left(\frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] d\Omega \xrightarrow{\text{nulla x l'eq.}} = \boxed{\int_{\Omega} p \frac{D\varphi}{Dt} \, d\Omega}$$
 (portiamo la derivata e l'altro fuori da p)

Chiamiamo forma integrale eq. di continuità, semplice se si considera una CORRENTE FLUIDA STATIONARIA: def. del tubo di flusso



$S =$ area della corrente. Ho campo di moto con direzione preferenziale, se moto è Mat.

Corrente \equiv t. di flusso. Prendo porzione di Volume Ω larga Δs e applico il p.d.c.m.

Poi mi applico applicando la 3^a form. th. trasporto:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} p \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} p \vec{V} \cdot \hat{n} \, d(\partial\Omega) = 0$$
. Il 1° termine, poiché

siamo in moto Mat. [variabilità locali nulle], è nullo.

La frontiera $\partial\Omega$ si può considerare come $\partial\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

(40) [unione di aree inferiori, laterali e superiori] Qui non si scompone integrali.

$$-\int_{A_i} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA_i - \int_{A_u} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA_u - \int_{\Delta l} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA_l = 0$$

in C.R. le linee

di corrente non passano x il mantello, flusso attr. Δl è nullo. \Rightarrow
 il flusso in A_i = flusso in A_u . Con le giaciture ho

$$-\int_{A_i} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA_i + \int_{A_u} \rho \vec{V} \cdot (-\hat{n}) dA_u = 0 \Rightarrow \text{per il p.a.d. m. in}$$

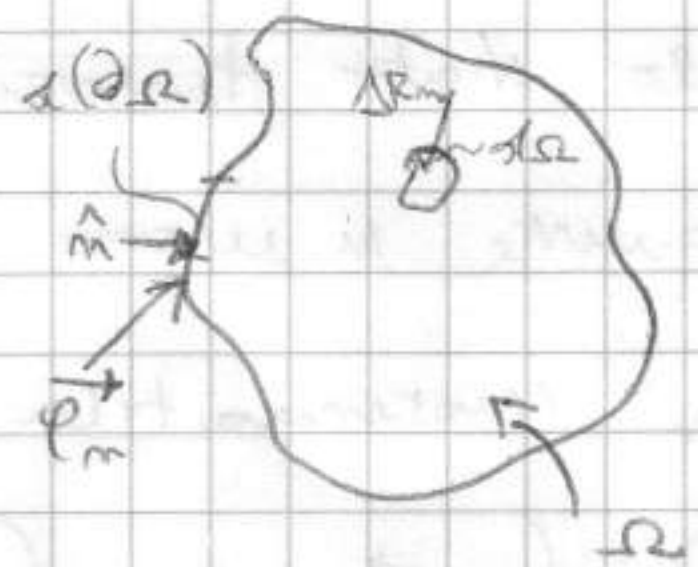
\downarrow \downarrow \downarrow
 Portata in massa Q_{mi} Q m u, portata in massa uscente Corrente Massimale $Q_{mi} = Q_{mu} V_{max}$. Portata

si conserva $\rightarrow \boxed{Q_{mi} = Q_{mu}}$: Eq. di continuità x le correnti massim.

Se $\rho = \text{cost}$ $Q_v = \text{costante lungo } S$.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad [\text{eq. scalare}] \quad (\text{è anche principio}) \quad 11/11/05$$

bilancio q. di moto. Data sistema Ω , [x una q. di materia che conserva la massa] la variazione della q. di moto è bilanciata da risultante forze esterne del sistema.



$$\int_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega \xrightarrow[\text{totale}]{\text{n. folie sciolta}} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega \quad [\text{ho il termine di variazione}] =$$

$$= \left[\text{noi abbiamo F. di massa e di contatto} \right] = \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}_n d(\partial\Omega)$$

\uparrow f. di massa \uparrow f. di contatto
 Se sist. è rappresentabile in schema continuo delle motodinamiche queste relazioni

Al 1° termine applichiamo la 1ª del tr. trasporto e consideriamo

$$\text{e eq. di conservazione, quindi equivalente a } \int_{\Omega} \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} d\Omega \quad (\rightarrow \text{risultante delle "forze d'inerzia" (massa x accelerazione)}) \quad \xrightarrow{II} \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega +$$

[ricorda $\vec{\varphi}_n = \hat{n} \cdot \underline{\underline{I}}$] \rightarrow posso applicare th. green-gauss \rightarrow

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\underline{I}} d\Omega \rightarrow \text{reconduto tutti i termini a integrali di volume. (4)}$$

Allora $\int_{\Omega} \left[\rho \left(\vec{f} - \frac{D\vec{V}}{Dt} \right) - \nabla \cdot \underline{T} \right] d\Omega = 0 \Rightarrow f. integranda \text{ deve essere}$

identicamente nulla $\forall \Omega \rightarrow \boxed{\rho \left(\vec{f} - \frac{D\vec{V}}{Dt} \right) = \nabla \cdot \underline{T}}$ \rightarrow eq. indefinita
bilancio q. su vols
 $\forall p.t.s$ e \forall istante

ci sarebbero 9 incognite x 6 equationi, ma \underline{T} e' simmetrico, quindi incognite sono 6. Quando lo abbiamo detto richiamavamo primo prin bilancio momento quantita' di moto [gia' usato, $t_{ji} = t_{ij}$]. Ci sarebbe prin conservation energia, ma il sistema non ha numeri termici non avrei altre info. \Rightarrow essendo tutti i principi il modello non e' CHIUSO. Nel modello detto quinnon specificare anche il tipo di sistema in esame (vale \forall corpo meccanico) \rightarrow detto aggiungere la RELAZIONE COSTITUTIVA DEL SISTEMA MATERIALE che lega le sue deformazioni allo stato tensoriale a cui e' sottoposto (non e' noto x tutti e x queste si usano osservazioni empiriche). Per fluidi Newtoniani \underline{T} esp. matematica \Rightarrow sistema e' CHIUSO.

$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot \underline{T} d(\partial\Omega)$. Appliciamo 3f. t. transp:

$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \hat{n} d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot \underline{T} d(\partial\Omega)$.

$\int_{\Omega} \rho \vec{f} d\Omega \equiv \vec{G}$ [resultante delle forze di massa] (zero)

$\int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \hat{n} d(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot \underline{T} d(\partial\Omega) \equiv \vec{J}$ [resultante forze su superficie]

$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\Omega \equiv \vec{I}$ [resultante delle forze d'inertia locali]

$$- \int_{\partial\Omega} p \vec{V} \vec{V} \cdot \hat{n} d(\partial\Omega) \equiv \vec{\Pi} \quad \text{[risultante dei flussi di quantità]} \\ \text{su moto}$$

Con queste definizioni simboliche l'eq. di bilancio q. di moto diventa:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{I} - \vec{M}$$

Quest'eq. non ha senso se non si pensa ad un determinato sistema materiale, e riferito a fluido ϵ in Ω chiuso

Per rendere nullo \vec{I} moti deve essere stationario.

Il flusso \vec{G} è derivato da manipolazione matematica particolare eq. di

partenza: $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} p \vec{V} d\Omega$; applicando i f. th. transp. ho $\int_{\Omega} p \frac{D\vec{V}}{Dt} d\Omega$;

pono decomporre accelerazione: $\int_{\Omega} p \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} p \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} d\Omega$

Il flusso \vec{G} parte dalle forze d'inerzia

e nullo in moti uniformi.

H

lavoriamo su $\vec{\Pi}$.

Sappiamo che $\vec{T} = p\vec{I} + \vec{T}'$. Quindi $\int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot \vec{T} d(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot p\vec{I} d(\partial\Omega) +$

$+ \int_{\partial\Omega} \hat{n} \cdot \vec{T}' d(\partial\Omega)$

(da isotropica)

$\int_{\partial\Omega} n_j t_{jn} \hat{i}_n d(\partial\Omega)$

$\int_{\partial\Omega} n_j \delta_{ji} \hat{i}_n d(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} p \hat{n} d(\partial\Omega)$

Possiamo scomporre in 2 termini:

$- \int_{\partial\Omega} p \hat{n} d(\partial\Omega) \equiv \vec{\Pi}_p$ [risultante dovuta a sforzi normali] + unica in isotropica

[anche in f. integrale da relazione costitutiva] Sappiamo che

$t_{jn} = \mu \frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ (qui si parla di quale materiale continuo parlo)

$- \int_{\partial\Omega} n_j \mu \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \hat{i}_n d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} \mu \frac{\partial u_n}{\partial m} \hat{i}_n d(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \vec{V}}{\partial m} d(\partial\Omega) \equiv \vec{\Pi}_v$

[ris. dovuta a sforzi tangenziali a causa]

La relazione qui sopra diventa

$$\vec{G} + \vec{H}_p + \vec{H}_v = \vec{I} - \vec{M}$$

Nei moti turbolenti c'è problema delle cancellate' Vettori

FINE PRIMO PERIODO (11/11/2005)

$$\vec{H} - \vec{I} = \vec{H}_p + \vec{H}_v$$

46. EQUAZIONE DI BILANCIO MEDIO NEL TEMPO
47. FLUIDO PERFETTO / PARADOSSO DI D'ALAMBERT
48. CIRCO TOTALE / MOTO LINEARE
49. TEOREMA DI BERNOULLI
50. LINEA PIETOMETRICA / DEI CARICHI / ESTENSIONE TH. BERNOULLI A EVOLUZIONE DINAMICA CORRENTE LINEARE
51. SECONDO COEFFICIENTE DI CORIOLIS
52. CALCOLO DELLA SPINTA DINAMICA
53. POROMOSI / LUCE A BOTTEME IN PARETE SOTTILE
54. LUCE A BOTTEME A PARETI GROSSE / STRAMAZZI
55. VELOCITA' DI EFFLUSSO TORRICELLIANA
56. PICCOLE LUCI / GRANDI LUCI
57. DINAMICA DELLE CORRENTI FLUIDE / CORRENTI IN PRESSIONE
58. CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA / TIRANTE IDRICO / MOTO UNIFORME DI CORRENTI IN PRESSIONE
59. PENDENZA PIETOMETRICA / MOTO UNIFORME PER CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA / PENDENZA DELL'ASSE DEL CAVALE
60. MODELLI QUANTITATIVI / MOTO UNIFORME NELLE CORRENTI
61. CONTORNO BAGNATO
62. RAGGIO IDRAULICO
63. ANALISI ADIMENSIONALE / TH. DI BUCKINGHAM
64. SLABREZZA RELATIVA / LEGGE DI MOTO UNIFORME DI DARCY-WEISBACH / FUNZIONE DI RESISTENZA / ABACO DI MOODY
65. VELOCITA' D'ATTRITO
66. FORMULA DI COLEBROOK-WHITE
67. MOTO UNIFORME NELLE LUOGHE CONDOTTE
68. EQUAZIONE DI CONTINUITA' DEI CARICHI / RETI DI CONDOTTE
69. PROBLEMI DI MOTO PERMANENTE LOCALIZZATO
70. BRUSCO ALLARGAMENTO DI SEZIONE

72. FORMULE DI BORDA
73. SBocco IN SERBATOIO / GRADUALE ALLARGAMENTO
74. BRUSCO RESTRINGIMENTO / SBocco DA GRANDE SERBATOIO / RACCORDI A T
75. CURVATURA LOCALE CONDOTO / CORRENTI A SUPERFIE LIBERA
76. PENDENZA DELL'ASSE DI FONDO / FORMULAZIONE DI CHEZY
77. FORMULAZIONE DI DARCY-WEIS.
78. ALUEI DI FORMA APERTA
79. SCALA DEI DEFLUSSI / ALUEI DI FORMA CHIUSA
80. ALUEI DI FORMA COMPLESSA
81. CLASSIFICAZIONI CORRENTI A SUP. LIBERA LINEARI / ENERGIA SPECIFICA
82. ALTEZZA CRITICA / CORRENTI VELOCI-LENTE
83. MEZZI PERMEABILI / FATTORE DI POROSITA' / PASSANTE % / CURVA GRADUOMETRICA
84. MOTI NEI TERRENI POROSI / LEGGE DI DARCY
85. FATTORE DI PERMEABILITA' / COEFF. DI PERMEABILITA' SPECIFICA / FALDE FREATICHE
86. FALDA - POTTO IN FALDA ARTESIANA
87. POTTO IN FALDA FREATICA
88. TRINCEE FRIANTI
89. NUMERO DI FRAUD
90. ALUEO A PENDENZA CRITICA - DEBOLE - FORTE

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_v = \vec{I} - \vec{\Pi} \quad \text{Rimettente forze applicate bilancia}$$

3/12/2005

la variazione di γ di moto. Forze possono essere di massa γ o \rightarrow soluti alla viscosità
 Contatto e superficie. (con sforzi normale e tangenziali)

Possiamo avere moto laminare o turbolento e nel 2° caso le grandezze
 variano in maniera casuale

Moto TURBOLENTO. Se i dati al contorno sono costanti (moto t. stazionario)

$$a(\vec{x}, t) \quad \text{possiamo applicare: } \langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\cdot) dt \quad \text{questo}$$

operatore di media e quindi la grandezza

è scomposta in 1 componente di solo valore medio e parte fluttuante:

$$\bar{a}(\vec{x}) + a'(\vec{x}, t) \quad \text{ma applicando la media alla 2° parte si ha } \langle a' \rangle = 0$$

Il tempo però è dell'ordine della decina di secondi \rightarrow abbiamo
 nel continuo.

Praticamente non ci interessa istante x istante il fenomeno ma una
 media temporale.

$$\langle \vec{G} \rangle \equiv \int_{\Omega} -p \, d\vec{\nabla}_z \, d\Omega = \left[\text{Per flussi incompressibili } p \text{ è costante e} \right.$$

$\left. \begin{array}{l} \text{f. integranda di solo tempo} \end{array} \right] = \vec{G} \rightarrow \text{forze di massa sono}$
 dato come stazionario

$$- \langle \vec{\Pi}_p \rangle = \int_{\partial\Omega} \langle p \hat{n} \rangle \, d(\partial\Omega) = \left[\text{Ricordiamo che } p \text{ (turbolento) si può} \right.$$

$\rightarrow \langle p \rangle \hat{n} = \langle \bar{p} \rangle + \langle p' \rangle = \bar{p} + 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{decomporre come "a"} \end{array} \right] = \int_{\partial\Omega} \bar{p} \hat{n} \, d(\partial\Omega) = \vec{\Pi}_p$$

$$- \langle \vec{\Pi}_v \rangle = \int_{\partial\Omega} \left\langle \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \right\rangle \, d(\partial\Omega) = \left[\text{operatore di media temporale di solo} \right.$$

integrazione parziale e prima interiore.

prima media temporale e poi integrale; \vec{v} come p] =

$$= \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \, d(\partial\Omega) = \vec{\Pi}_v$$

$$-\langle \vec{I} \rangle = \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial(p\vec{V})}{\partial t} \right\rangle d\Omega = [\text{applicando sempre la dec. di Rey}] =$$

$$= \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial(p\vec{V})}{\partial t} \right\rangle d\Omega + \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial(p\vec{V})}{\partial t} \right\rangle d\Omega, \text{ anche il termine è nullo}$$

perché siamo in moto + stat. (x del tempo) $\Rightarrow = 0$

$$-\langle \vec{\Pi} \rangle = \int_{\partial\Omega} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \rho \vec{V} \cdot \vec{u}_m d\Omega = [\text{applicando sol}$$

$$\text{entrambe reynolds}] = \int_{\partial\Omega} \rho (\vec{V} + \vec{V}') (\bar{u}_m + u_m') d\Omega; \text{ facendo}$$

media per questi prodotti si ha che: $\langle \vec{V} \bar{u}_m \rangle + \langle \vec{V} u_m' \rangle + \langle \bar{u}_m u_m' \rangle + \langle \vec{V}' u_m' \rangle$ non portano oltre nulla.

$$\text{Quindi } \langle \vec{\Pi} \rangle = \int_{\partial\Omega} \rho \vec{V} \bar{u}_m d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \langle \vec{V}' u_m' \rangle d\Omega$$

\downarrow
 $\vec{\Pi}$

\downarrow
 $\vec{\Pi}'$

L'op. su media temporale applicata all'eq. di bilancio è:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_v = -\vec{\Pi} - \vec{\Pi}'$$

la media non incide molto, nel caso del flusso della q. di moto (è "non irreversibile", effetti turbolenti non scompaiono ma lasciano tracce con termine aggiunto $\vec{\Pi}'$; moto anulare, dissipazione energia

(con eq. di bilancio p.t. x p.t.)

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{D\vec{V}}{Dt} \right) = \nabla \cdot \vec{\Pi} \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \end{cases}$$

Abbiamo 4 incognite di equazioni.
Solo con la relazione costitutiva si chiude il sistema.

④ [$\rho = \rho(p, t)$ varia] Si può considerare questo modello per il

FLUIDO PERFETTO [fluido di gasse di questa proprietà:]

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, \text{ SEMPRE} \rightarrow \text{qualsunque valore annullo } \nabla \vec{v} \text{ (} \forall \text{ el.}$$

dinamica del sistema), lo sforzo tangenziale \rightarrow le deformazioni sono NULLE

\Rightarrow \forall valore della densità $\underline{\mu = 0}$ [IDEALE \rightarrow MODELLO FLUIDI IDEALI]

Sistema non ha proprietà viscosa

$\underline{T = p I + \underline{T}'}$ \rightarrow \times il fluido ideale la relazione costitutiva è solo la parte isotropa del tensore degli sforzi.

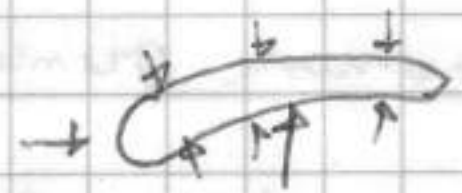


Quindi nel modello $\nabla \cdot \underline{T} = \nabla \cdot (p \underline{I}) = \nabla p \Rightarrow$ le equazioni CHANDLER il sistema (p , 3 velocità, 2 densità) [modello proposto da eulero]

Un corpo che si muove relativamente ad un fluido: con fluido ideale \times mantenere moto relativo non servono forze [PARADOSSO DI D'ALEMBERT]

Modello da risultati esatti \times funzioni

[nel profilo alare si crea distrib. pressione / che risultante è la portanza del sistema che fa stare in aria eulero diceva che non servono i motori]



Per fluidi incompressibili $\rightarrow p = \text{costante}$

- " " pesanti $\rightarrow \vec{f} = -g \nabla z$ [solo controspinta forza peso]

L'eq. di bilancio e di continuità diventano

$$\begin{cases} p \left(-g \nabla z - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \nabla p & (1) \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 & (2) \end{cases}$$

① S. può anche scrivere: $-\frac{1}{g} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla z + \nabla \left(\frac{p}{\rho g} \right) = \nabla \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = \nabla \zeta$ perpendicolare

$$\rightarrow \boxed{-\frac{1}{g} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \zeta}$$

Oppure, tramite la decomposizione di eulero, $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ e

ricordando che $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ (47)
 $\hookrightarrow \vec{\omega} = \text{VORTICITÀ}$

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\omega} \right) = \nabla \zeta \quad \leadsto \quad \frac{1}{\rho} \vec{V} \times \vec{\omega} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\nabla (V^2)}{2\rho} + \nabla \zeta$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\zeta + \frac{V^2}{2\rho} \right); \text{ si introduce } \boxed{H \equiv \zeta + \frac{V^2}{2\rho}} \rightarrow \text{CARICO TOTALE}$$

(somma questa potenziale e dell'altra costante) $[H] = L$; e la somma di 3 termini $\left[\zeta + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2\rho} \right]$.

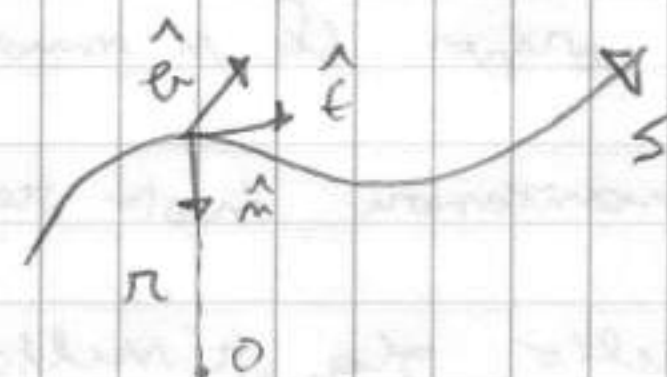
① e' anche $\boxed{\frac{1}{\rho} (\vec{V} \times \vec{\omega}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla H}$

Supponiamo che il fluido perfetto, incomprimibile e pesante sia in moto STAZIONARIO.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{Integriamo eq. di bilancio.}$$

Prendiamo particella che si muove lungo S .

Abbiamo linea che si muove con particella \rightarrow lungo traiettoria



[terza invariante]: \hat{t} e' definito da vettore tangente ad ogni p.to su S , poi da normale principale \perp a \hat{t} e che giace lungo la direzione del raggio di curvatura locale di S [con centro osculatore al centro O] e infine da binormale \perp a piano $\hat{t}\hat{n}$.

Si' una questa terza parte d'accelerazione della particella in questo moto giace sempre nel piano $\hat{t}\hat{n}$ che si determina $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ [diretta come \hat{t}] oppure e' un'accelerazione CENTRIFUGA [ma con variabile sempre diretta verso \hat{n}].

- Conr. proiezione su \hat{t} : $\vec{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0$; integrando $\Rightarrow \zeta = \text{costante lungo } \hat{s}$

- " " " \hat{n} : e' acc. centripeta dove \exists : $-\frac{V^2}{\rho n} = \frac{\partial \zeta}{\partial n}$

ζ rispetto a \hat{n} varia; c'e' termine che determina curvatura funzione che si sovrappone ad effetto g ; se traiettoria e' rettilinea $\zeta = \text{cost.}$

Se curvatura e' "dolce", ρ grande e termine piccolo \rightarrow Moto

② LINEARE: moto dove raggio di curvatura e' molto grande (e)

lim. ∞). [Confrontiamo con $g \nabla s$ la $\frac{V^2}{2g}$ trascurabile a sei 2 ordini di gran. <]

Se moto e' lineare sui piani \perp la ξ si può ritenere COSTANTE
 \hookrightarrow a traiettorie lineari

- Contr. proiezione su \hat{t} . Uniamo 2 formulazioni di ①.

$\vec{V} \times \vec{W}$ e' \perp a \vec{V} e quindi a $\hat{t} \Rightarrow$ la proiezione e' nulla

$$0 = 0 + \frac{\partial H}{\partial s} \quad \left[H = \xi + \frac{V^2}{2g} = Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right], \text{ integrando } H \text{ e'}$$

una COSTANTE lungo s : TEOREMA DI BERNOULLI (fatto prima di allora)

13/12/2005

$$H \equiv \underbrace{Z + \frac{P}{\rho g}}_{\substack{\text{Carico} \\ \text{Idraulico} \\ \text{Totale}}} + \underbrace{\frac{V^2}{2g}}_{\substack{\text{Altezza} \\ \text{Cinetica}}} \Rightarrow [H] = L$$

Il th. di Bernoulli afferma che per il moto di un fluido perfetto, stazionario, il carico idraulico totale e' costante lungo la traiettoria della particella.

Ogni termine e' soggetto ad interpretazione energetica. Ma le dim. sono quelle di una F.L. Se però consideriamo i termini come ENERGIA \times unita' di peso della massa fluida, moltiplicando \times il peso otteniamo appunto l'energia. $\Rightarrow H$ e' ENERGIA MECCANICA PER UNITA' DI PESO

I 3 termini rappresentano tutte le possibili forme di energia associate all'evoluzione dinamica del sistema.

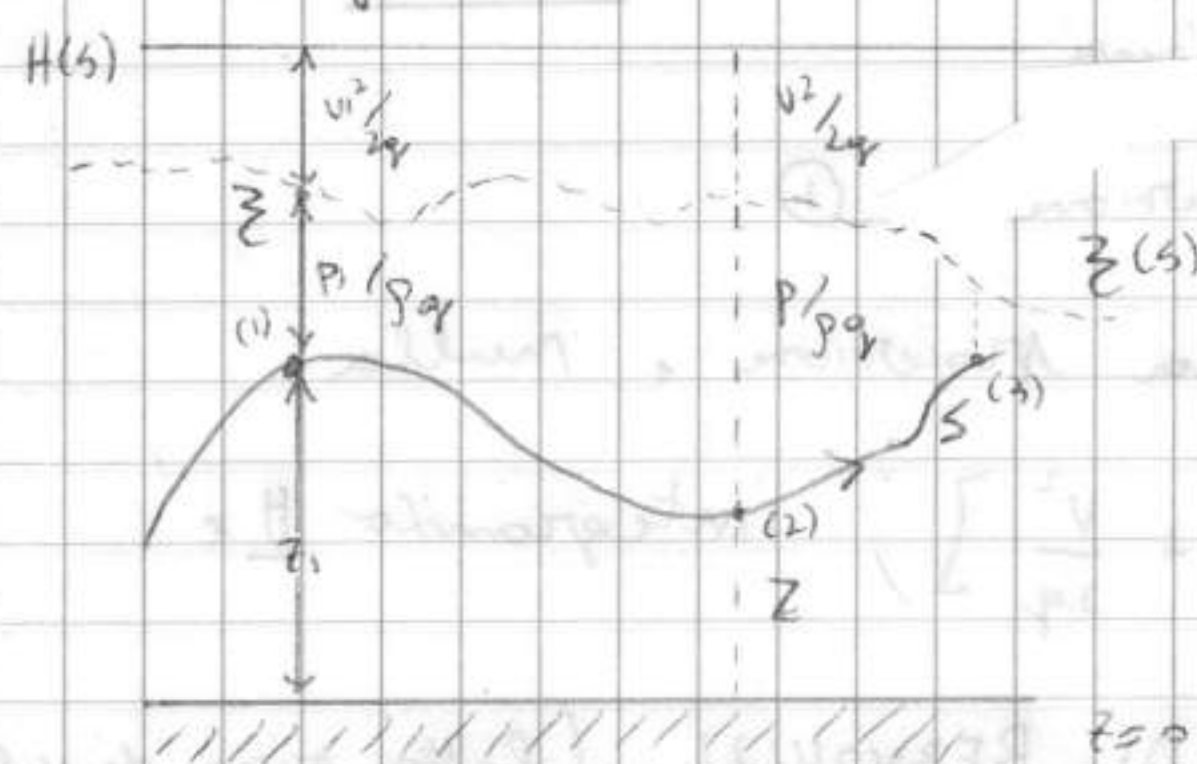
- C'è energia POTENZIALE della massa fluida ad altezza Z ; in questa massa e' portata a quota + bassa, la massa e' in grado di fornire energia pari a $\Delta Z \cdot \vec{P}$ (e viceversa se sale)

- $\frac{P}{\rho g}$ \propto al campo di pressione a cui e' soggetta; \times far spostare particelle [che deve compiere lavoro \times superiore pressione] delle
fornire energia $\Delta P / \rho g \cdot \vec{P}$

- Se portiamo massa a $v=0$ posso trasformare la g di moto in una forma di energia CINETICA che varia pari a $\frac{V^2}{2g} \cdot \vec{P}$

Sono TUTTE e le SOLI forme di energia meccanica associabili ad un Ω

Int. energetica del th. Ex: Particella di fluido perfetto in moto.



V positione posso definire H.

Ex. (1) ad altezza z_1 c'è una certa pressione $P_1 \rightarrow$ con $P_1/gg \rightarrow$ definirlo quindi \sum . Facendo il calcolo $\forall p \in S$ e mettendolo insieme ottengo la LINEA

PISTONIERIS $[Z(s)]$. Ad una generica s ho Z e P/gg . Per completare alle Z devo sommare $v^2/2g \rightarrow$ ottengo H e sommando $\forall p$ to avrei la LINEA DEI CARICHI $[H(s)]$. Per il fluido perfetto questa linea varia univocamente definita, ovvero una RETTA ORIZZONTALE (il carico è costante). Th. da informazione molto importante. Nell'ev. dinamico

posso avere una TRASFORMAZIONE dell'energia mecc. nelle varie forme di rappresentazione. Ex. in (2) \downarrow la E_P e \uparrow la $E_{cinetica}$ (rispetto a (1)); in (3) invece la pressione [rispetto a (2)] diminuisce a favore di E_P e $E_{cinetica}$.

L'ENERGIA TOTALE \times unita di peso di fluido rimane COSTANTE \rightarrow modello di eulero è CONSERVATIVO [Energia presente nel sistema non si dissipa ma rimane costante]. I sistemi reali invece hanno evoluzioni dinamiche dissipative.

Nel sistema reale H varia linea che DISCENDE nel verso del moto [dissipazione \times entropia, viscosità, calore, etc.] \rightarrow ASSURDO FISICO e' H che SALE.

Quando si può usare il modello di eulero? \rightarrow Quando vogliamo

desumere evoluzione dinamica $(s=t)$ per un intervallo molto BREVE \rightarrow faccio quindi ipotesi fluido perfetto. [Il fluido non ha né viscosità e né il tempo \times dissipare l'energia iniziale posso considerarlo fluido perfetto]

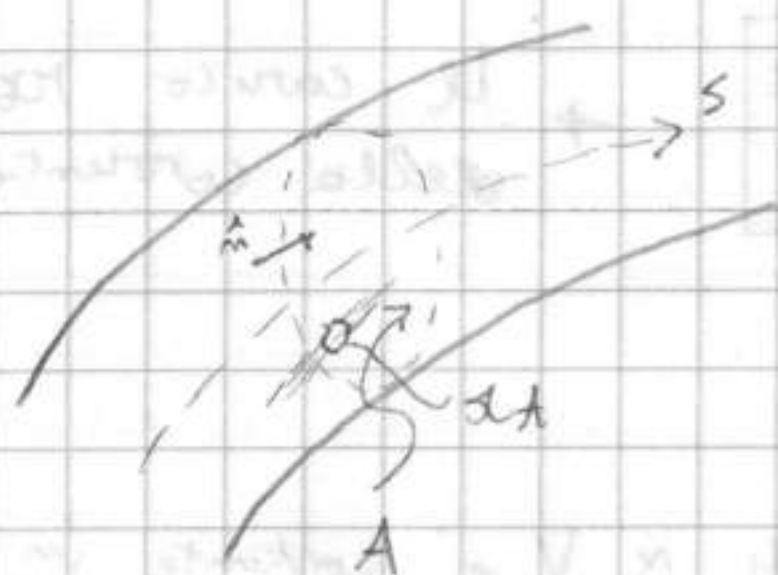
//

ESTENSIONE TH. BERN. A EVOLUZIONE DINAMICA CORRENTE LINEARE

Siamo in stato STAZIONARIO

Tubo su flusso con certa area A . Se le traiettorie lungo

⑤0 e' una + della corrente sono LINEARI [raggio di curvatura



molto grande] allora c'è corrente lineare.

Conr. area dA e conr. il FILETO FLUIDO [t. di $\frac{1}{\infty}$]. Per calcolare la potenza meccanica

dell'area dP, posso quantizzare l'energia $\times q$, se però associata a particella, mi serve

il peso del fluido che passa in dA \times

unità di tempo [calcolo portata e poi $\times pg$]

$$dP = \rho g H dQ$$

H lungo traiettoria particella è costante, ma cambiando traiettoria può

avere valori $\langle \rangle$. Cmq se considero variazione $\frac{1}{\infty}$, H varia per $\frac{1}{\infty}$ quindi

lo conr. costante in dA. \Rightarrow la potenza è COSTANTE lungo S. Quindi

$$P = \int_A dP = \int_A \rho g H dQ = q \int_A \left[z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right] \rho [\vec{V} \cdot \hat{n} dA]$$

la potenza totale della corrente si può scomporre in:

$$1) \int_A \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA \rightarrow \text{traiettoria è lineare nei piani oserei } \perp \text{ la}$$

\Downarrow

$\{$ si può ritenere costante \Rightarrow

$$\{ \int_A \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \{ Q_M$$

$$2) \int_A \frac{v^2}{2g} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA ; \text{ introduce } \alpha = \frac{1}{\rho U^3 A} \int_A \rho v^2 \vec{V} \cdot \hat{n} dA ; \text{ quindi}$$

\Downarrow

VELOCITÀ MEDIA SULLA SEZIONE

(coefficiente di CORIOLIS)

$$\frac{\alpha \rho U^3 A}{2g} = \frac{\alpha U^2 Q_M}{2g}$$

Quindi

$$P = q \left[\{ Q_M + \frac{\alpha U^2 Q_M}{2g} \right] \Rightarrow P = q Q_M \left(\{ + \frac{\alpha U^2}{2g} \right)$$

Poiché

$$P = \int_A dP = \text{costante in S. Poiché } Q_M \text{ è costante lungo S, (51)}$$

anche la quantità tra parentesi è costante in $S \rightarrow$ si ha quindi che
 * per correnti stazionarie lineari $\left\{ \begin{aligned} & \zeta + \frac{dU^2}{2g} = \text{costante lungo } S \\ & \downarrow \\ & \Delta \text{ energia cinetica} \\ & \text{movia } \times d \end{aligned} \right. \rightarrow$ il carico medio della corrente
 è costante \forall p.t. di S

Dovremmo collocare d \vec{V} e \vec{n} sono paralleli. Quindi α \vec{V} è costante in A
 $\downarrow \vec{V} \cdot \vec{n} = v$
 $d = \frac{1}{\rho U^3 A} \rho U^3 A$, con α alcuni casi $d \approx 1$ [in certe applicazioni
 va da 1,01, 1,02 ... fino al max 1,15] \Rightarrow supporre $d \approx 1$
 Vuol dire approx. al massimo del 10/15 %, accettabile.

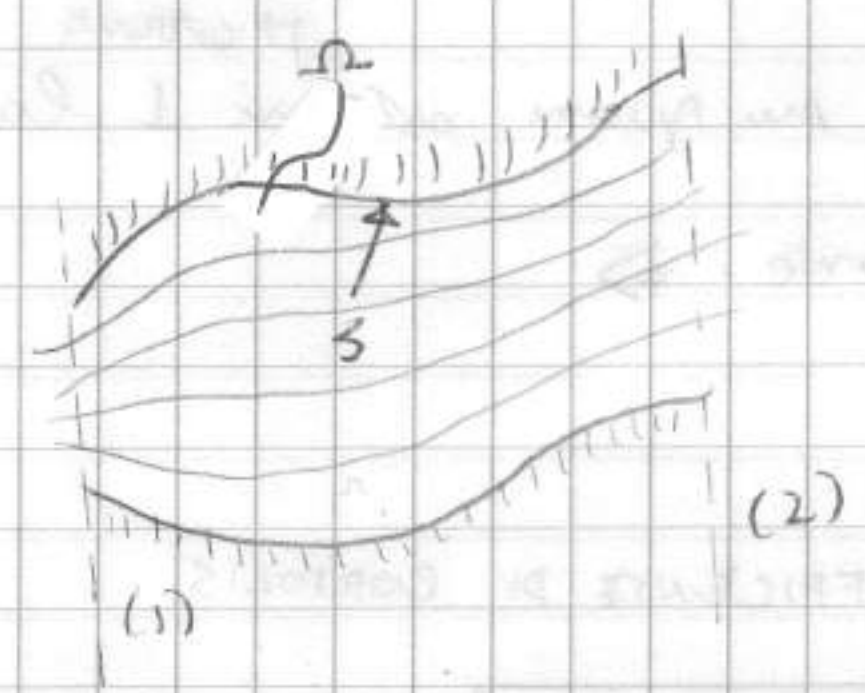
Se ad. ex. abbiamo canale o tubo che deve passare \times serie di ostacoli



A monte $d \approx 1$, ma a valle abbiamo un \gg profilo
 gli 'Velocità' e d può essere 20, 30 ...

H

CALCOLO DELLA SPINTA DINAMICA



Corrente che attraversa volume di controllo
 A monte e a valle entra ed esce acqua.
 Voglio sapere il tipo di azioni che acqua
 esercita su superfici laterali [impermeabili]
 (moto stazionario e tratto breve di evoluzione
 spaziale tra (1) e (2)). Poiché con moto è turbolento utilizzo le eq.
 mediate: $\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_v = -\vec{M} - \vec{M}'$. Penso che dissipazione non
 trascurabile $\Rightarrow \vec{\Pi}_v = 0$ [risultante forze viscose nulle]. Inoltre suppongo
 che il moto sia lineare in (1) e (2) e che $\vec{M}' \approx 0$ [non vuol dire che il φ
 della q , su moto del campo turbolento è nullo, ma che \vec{M}' entrante e
 uscente sono pressoché uguali \rightarrow non cambia nessun turbolenza; penso
 funziona il modello a zero viscosità tra (1) e (2) non si ha generazione di
 turbolenza, ex. elica, spigoli...]

Eq. di SANKRISTIS:

⑤ $\vec{G} + \vec{\Pi}_p = -\vec{M}$ dove $\vec{\Pi}_p = \vec{\Pi}_{p1} + \vec{\Pi}_{p2} + \vec{\Pi}_{p3}$ dove $\vec{\Pi}_{p2} = -\vec{S}$

quindi sostituendo $\vec{G} + \vec{H}_{D1} + \vec{H}_{D2} + \vec{H} = \vec{S}$

Se moto è lineare $|\vec{H}_1| = \rho v_1^2 A_1$ e $|\vec{H}_2| = \rho v_2^2 A_2$

POROSIMIS: "minima dei pori"

16/12/05

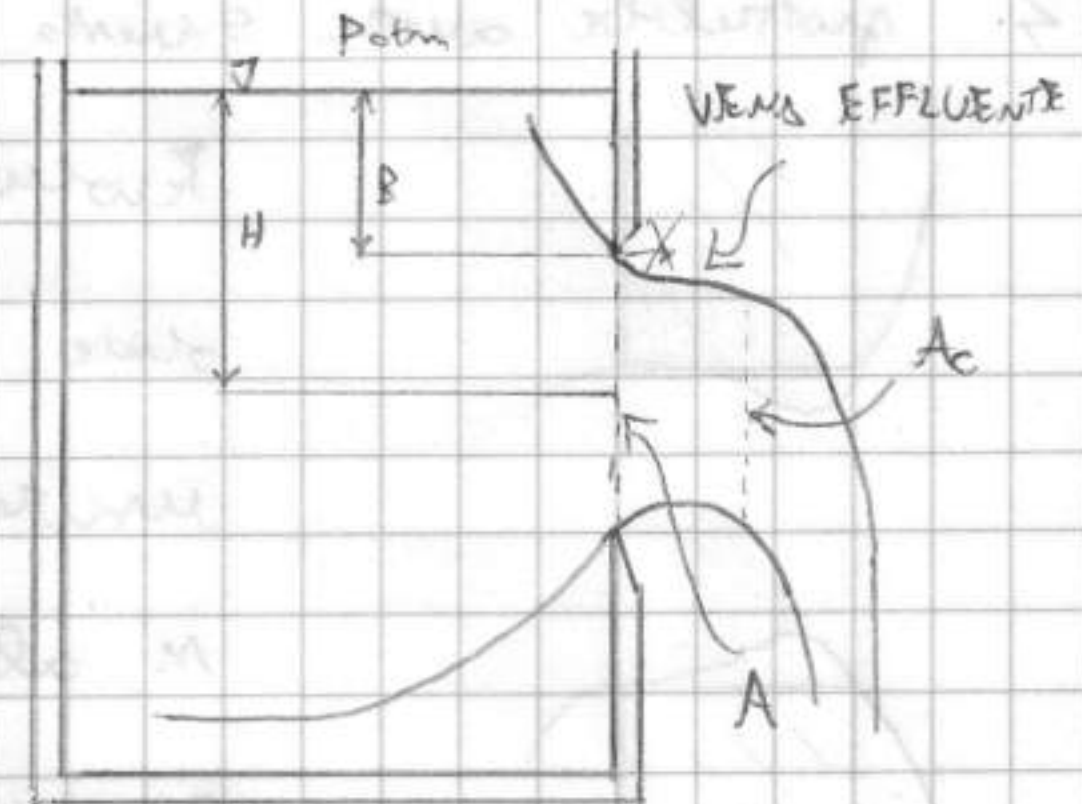
Problemi di deflusso di un liquido in Ω nella cui $\partial\Omega$ \exists una apertura attraverso il quale esce il fluido (ex. diga, etc)

\exists due macrocategorie:

- LUCI A BATTENTE: ex. Canone con acqua

ΔP che mette in moto l'acqua.

L'area del foro = LUCE. Quando il contatto della vena con le pareti si riduce ad una linea si hanno LUCI A BATTENTE in



particelle motile [inghiottite, solo linea di contatto]

Vena alimentabile da ogni parte di Ω , ogni traiettoria ha la sua curvatura. Nei punti in cui le particelle lasciano il contenitore, queste hanno una curvatura (accento), appena a valle della linea di contatto non c'è "motile" \times avere curvatura [a monte è vincolata dal deflusso] ma non ha immediatamente tratti rettilinei (altrimenti

$a = \infty$ discontinuità) \rightarrow fino a \rightarrow regione dove effetti cinematici della prima sezione dove si registra moto lineare curvatura non esauriti \Rightarrow SEZIONE CONTRATTA [A_c] più piccole di A

che si completa contrazione vena. Dopo A_c la particella \rightarrow ed ellisse rispetto alle nuove condizioni, ed è "solo" soggetta alle forze peso, e corre in la stessa ellisse come corpo libero. F.q. imprimono \vec{g} a particella e vena \rightarrow a ruotare in verticale e si restringerà. [la portata costante è alimentata in una sett. + piccola che aumenta la V.]

Entrata delle contrazioni di valle curvatura traiettoria, della velocità locale della particella, della posizione geometrica della luce (non ex. è nel fondo dove vena contratta e minore).

la luce (di qualsiasi forma) penetra in tutto il contorno

una $P > 0$ dello stesso della vena (che è a P_{atm}) → luce e sotto

CSRICO. Luce a battente sono quelle dove tutti i p.ti del contorno della

luce sono a $P > 0$ [> di quella della vena, che si nota a P_{atm}]

Si distingue il ^[B]BATTENTE della luce con il carico minimo che agisce

nella luce, mentre il ^[H]CSRICO nella luce è l'h di pressione nel baricentro della luce.

Si potrebbe avere questa situazione [pareti rigide e non tagliate]

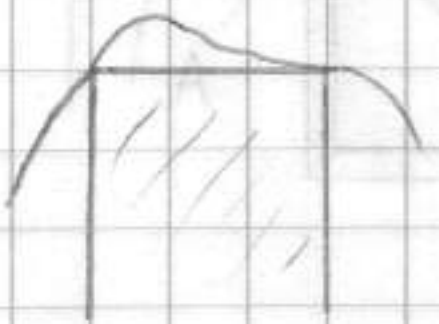


Evolutione dentro la parete, c'è una regione Δc

stato moto è rettilineo ma qui la vena → est

uscire occupando tutto lo spazio a stimolazione e

si allargherà e poi segue evoluzione.



Ampliatore penserebbe che Σ fenomeno di contrazione,

ma c'è, solo che è contenuta tutta dentro alla

parete [LUCI A BATTENTE A PARETI GROSSE]

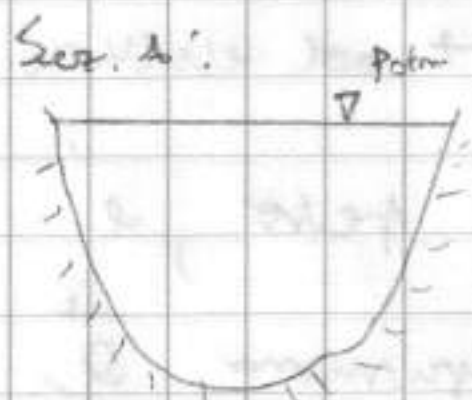
- LUCI A STRAMATTO (o STRAMATTO) : luce / parte del perimetro della

luce sono a $P = 0$ [non tutti i p.ti sono sotto carico]

P.ti contogliano sempre con curvatura, abbandonate

la luce si varia → a curvatura verso il basso.

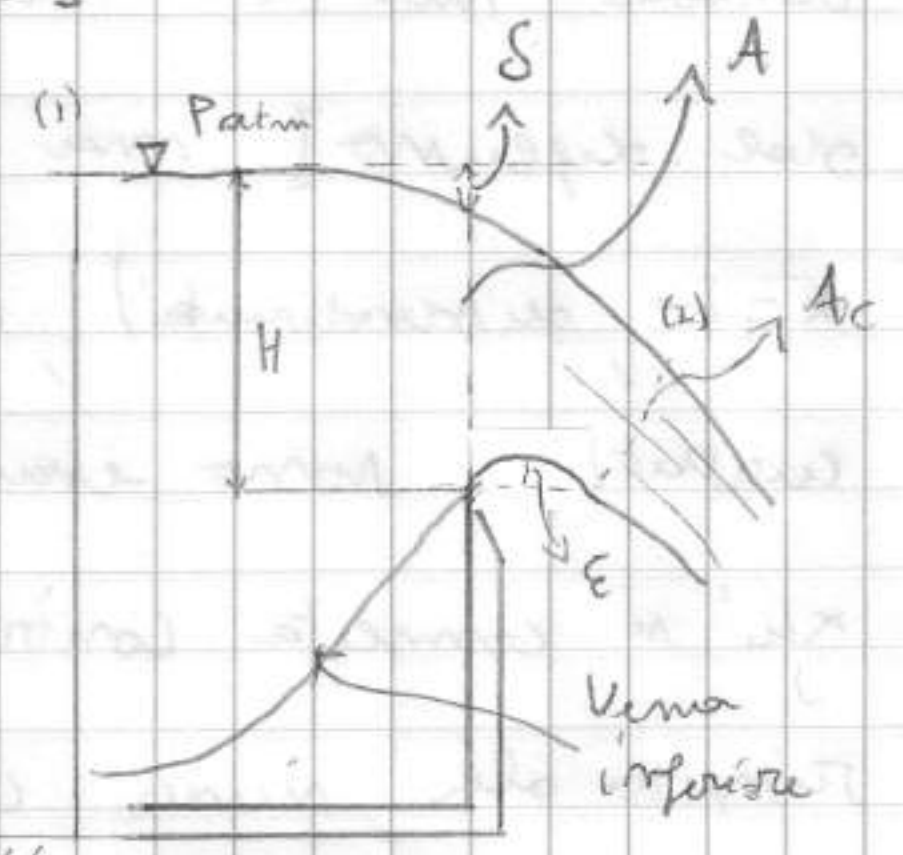
Anche qui c'è un Δc con traiettorie rettilinee.



→ luce che è parzialmente sotto

carico.

[PARETE SOTTILE] + $\tau = 0$



la vena inferiore ha regione elastica analoga al 1°

caso; raggiungerà E max. di massima elasticità e si romperà. A monte

invece c'è abbandonamento δ dovuto a cosa? Quelle particelle non hanno

vincoli a contorno. Si chiama a causa di un moto esclusivamente dinamico.

Sistema a monte ha certo carico (Σ, H, \dots). Quando queste particelle

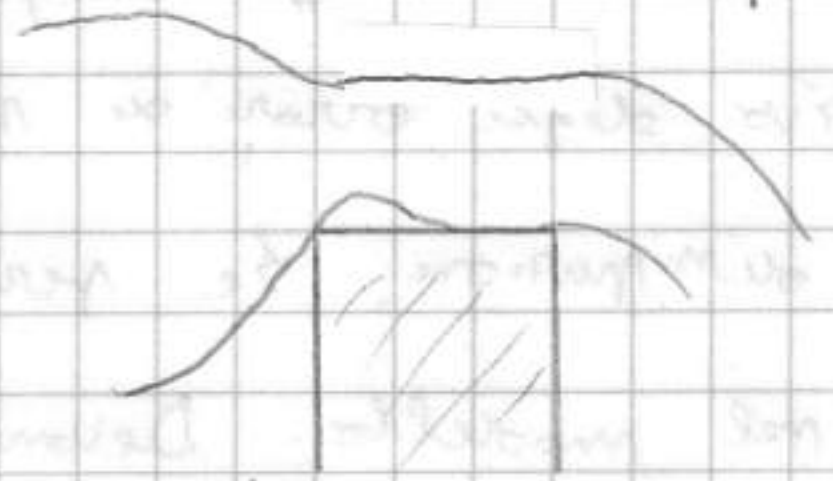
tendono ad alimentare vena, aumentano di velocità che passano in tubo

(54) di flusso minore \Rightarrow aumenta l'energia cinetica pure dall'energia di

carico potenziale a monte \rightarrow il livello di carico si abbassa, δ e' proprio l'altera cinetica dovuta alla trasformazione di energia.

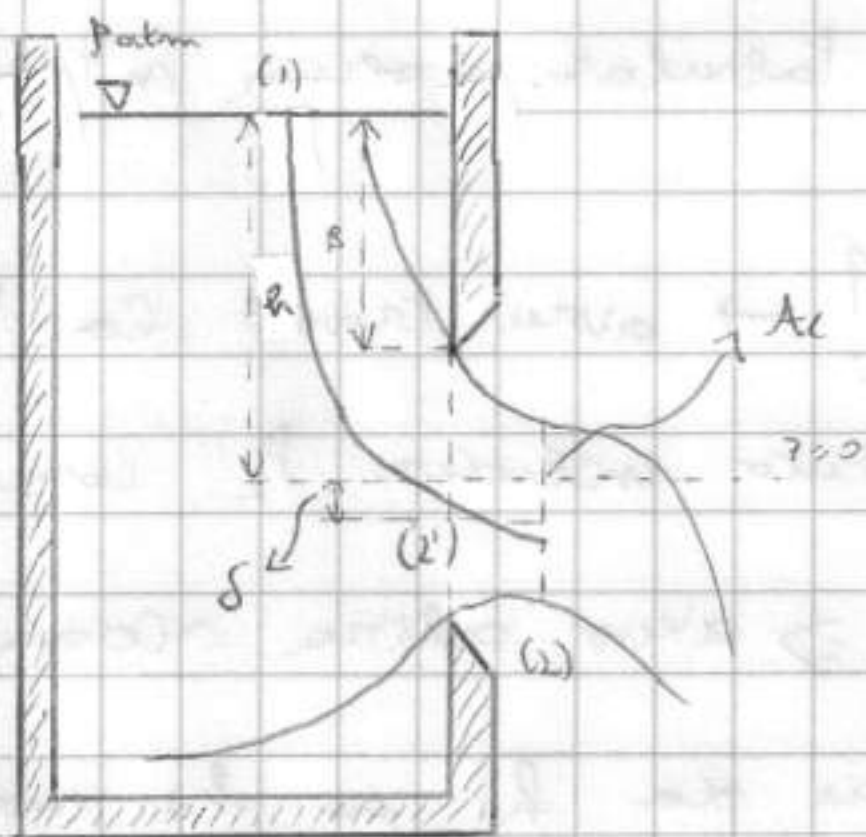
[caso in Parete Grossa dove la contrazione si esaurisce nelle pareti. Anche qui c'e' il carico max nella soglia]

[B=0]



Per studiare questi sistemi considero degli spazi brevi.

Dalla nuova evoluzione da (1) a (2) \Rightarrow escludiamo termini dissipativi e si può trattare con il modello di fluido perfetto.



A_c ha l'angolo a quota tranne di δ e A a causa effetto gravita' \rightarrow abbassamento δ . Poiche' e' poco a valle, l'abbassamento e' molto piccolo [$\delta \ll h$]. Se luce e' in fondo si ha max δ e il carico non e' rilevante [$\approx 10\text{mt}$] e' errore trascurare \rightarrow della vena

Consideriamo una generica traiettoria che parte da (1) a (2) \rightarrow si può applicare l'eq. Bern. $\rightarrow H_1 = H_2$. Si assume $Z=0$ il piano $x-h$.

[$H_1 \equiv Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$]; la Z in (1) e' h ; $P=0$; in (1) e' in quiete $\rightarrow V=0 \Rightarrow$

$H_1 = h$. In (2), la $Z = -\delta$; poi c'e' un h di pressione $\frac{P_2}{\rho g}$ e un h cinetica. $H_2 = -\delta + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$. P_2 e V_2 sono incogniti. Si interviene V_2 x il calcolo della portata.

Sappiamo che $\rho(\vec{f} - \frac{D\vec{V}}{Dt}) = \nabla P \rightarrow -\rho g \nabla Z - \rho \vec{A} = \nabla P$. Proiettiamolo

in $\uparrow z$. $\Rightarrow -\rho g + \rho g = \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow P_2 = \text{cost. risp. a } z$. Poiche' a contorno sho

$P_{atm} \Rightarrow$ in A_c ho proprio $P_2 = P_{atm}$ e in termini relativi $P_2 = 0$.

Quindi si ha $V_2 = \sqrt{2g(h+\delta)}$ \rightarrow VELOCITA' DI EFFLUSSO TORRICELLIANO

[Esiste anche luce a Marnetta]

Per det. la Q effluente possiamo considerare una PICCOLA e GRANDE luce, ma non in relazione alla grandezza delle variazioni di carico tra i $<>$ p.ti

della luce (rispetto al valore di carico medio) \Rightarrow in tutti i p.ti della

luc ha un \bar{h} tratto di PICCOLE LUCI.

- PICCOLE LUCI: Velocità di efflusso $v = \text{const.}$ b. p.to E a A_c .

Quindi $Q = V_{eff} A_c$; non V_T , ma V reale $\rightarrow V_{eff} = V_T \cdot [C_v] \rightarrow$ coefficiente correttivo degli errori di semplificazione nel calcolo di V_T . Sarà < 1 a causa della diminuzione. Se però $\rho = 0,4$ e $g h \Rightarrow$ ho fatto errori gravi nel modello. Devono essere al max. dell'ordine del 2%.

Quindi $Q = A_c C_v V_T$. Ma come si calcola l'area contratta? Si sa che $A_c = C_c A$, dove C_c è < 1 e sperimentalmente si registra contrazione significativa.

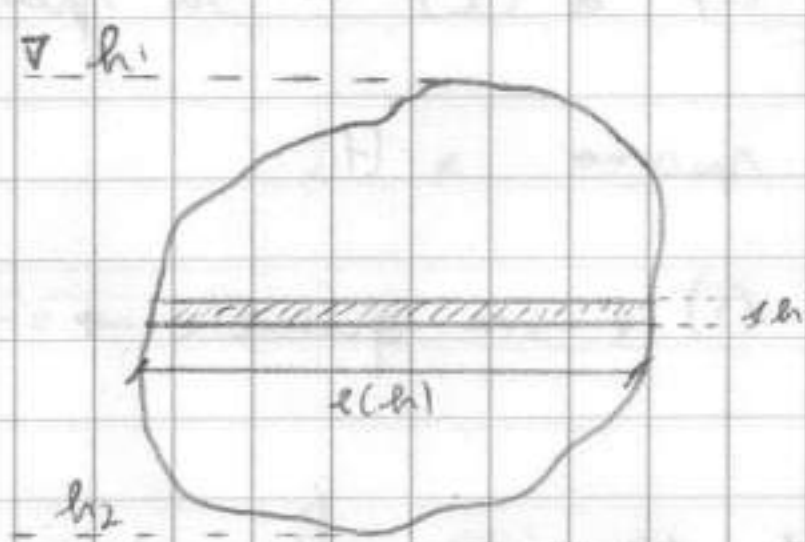
$$\rightarrow \boxed{Q = C_c C_v V_T A = C_d A \sqrt{2gh}}$$

$C_d = \text{COEFF. di EFFLUSSO}$
(o RIDUZIONE della PORTATA)

Calcolato e tabulato x alcune situazioni.

Perché non si è calcolato il tragitto da (1) a (2)? \rightarrow avrei trovato la V in p.to E area A . Ma nel te. Bernoulli non avrei potuto escludere P_2 come prima poiché particelle hanno \vec{q} e \vec{a} che non costano \Rightarrow altre incognite.

- GRANDI LUCI: Ex. a trattante dove il carico varia da h_1 a h_2 max e la variazione è significativa. Si può dividere



l'area in strisce orizzontali larghe dh e spessore dh . Calcolando la portata di ciascuna striscia posso applicare modello piccole luci.

luci: $dQ = C_d \sqrt{2gh} l(h) dh$. Quindi

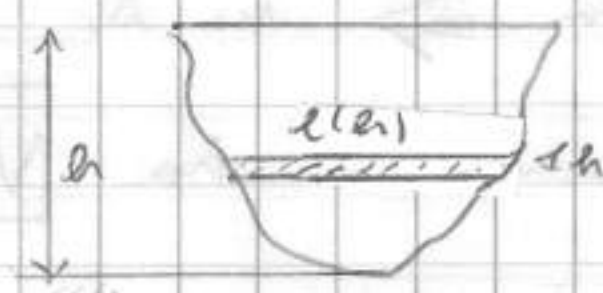
la portata totale è $Q = \int dQ = \int_{h_1}^{h_2} C_d \sqrt{2gh} l(h) dh \Rightarrow$ ho l'integrale delle Q :

$$\Rightarrow \boxed{Q = \bar{C}_d \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} h^{1/2} l(h) dh}$$

$[C_d \text{ varia nel campo dell'integrale ma si può avere un valore medio}]$

Se avessi avuto le luci a strarimando avrei avuto:

$$Q = \bar{C}_d \sqrt{2g} \int_0^{h_1} h^{1/2} l(h) dh$$

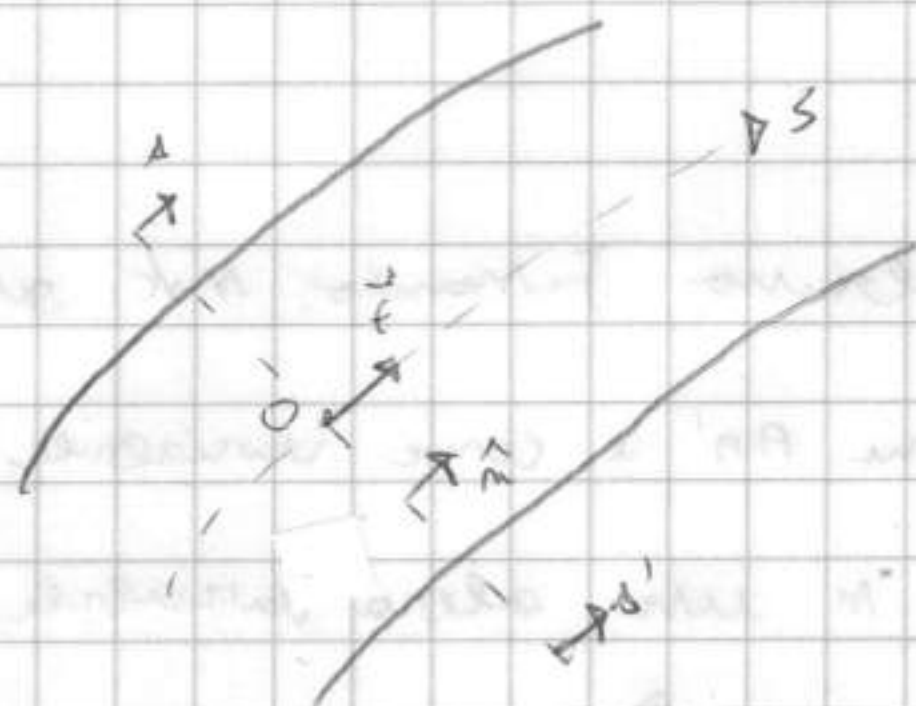


C_d è "il residuo" della non applicazione del modello di Euler e quindi

⑥ delle utilità di approssimazioni.

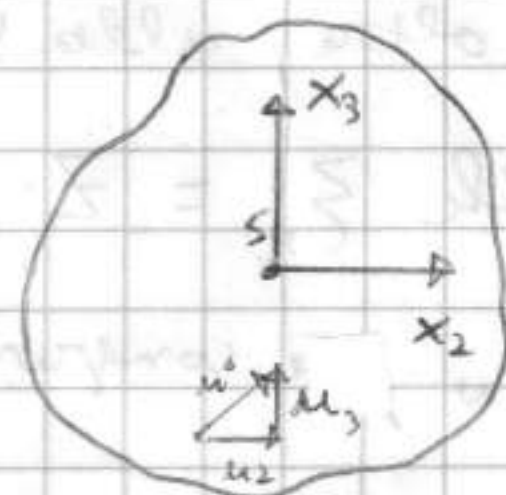
Si possono risolvere i problemi di libertà in un problema con
 simmetrie nelle CORRENTI LINEARI [per curvatura traiettoria molto grande]
 sui piani \perp a traiettoria la ζ può ritenere costante. Analizziamo le
 CORRENTI IN PRESSIONE e le CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

CORRENTI IN PRESSIONE



Tubo di fluido che presenta una sua
 preferenziale [ASSE DELLA CORRENTE] di molto
 e congiungente dei baricentri della sezione.

Cons. sezione AA' generica. [det. $\Delta S'$]



Fissiamo come base l'asse s e

x completare la terna due assi \perp x_3 e x_2 .

la cons. di linearità fa sì che $u_2 \approx u_3 \ll u_1 \Rightarrow$ il vettore
 velocità ha 3 componenti ma 2 di queste [quelle \perp a \vec{s}] sono
 molto più piccole. Quindi u ha curvatura molto piccola. u_2 e u_3
 determinano un moto SECONDARIO [u''] che farebbe muovere la particella nella
 sezione, ma in queste cons. u_2 e u_3 sono TRASCURBILI [$\vec{V} \approx \vec{u} \cdot \vec{s}$]

Inoltre $\zeta = \text{cost}$ in AA'



Conoscendo la P in un punto e la config. geometrica posso det.

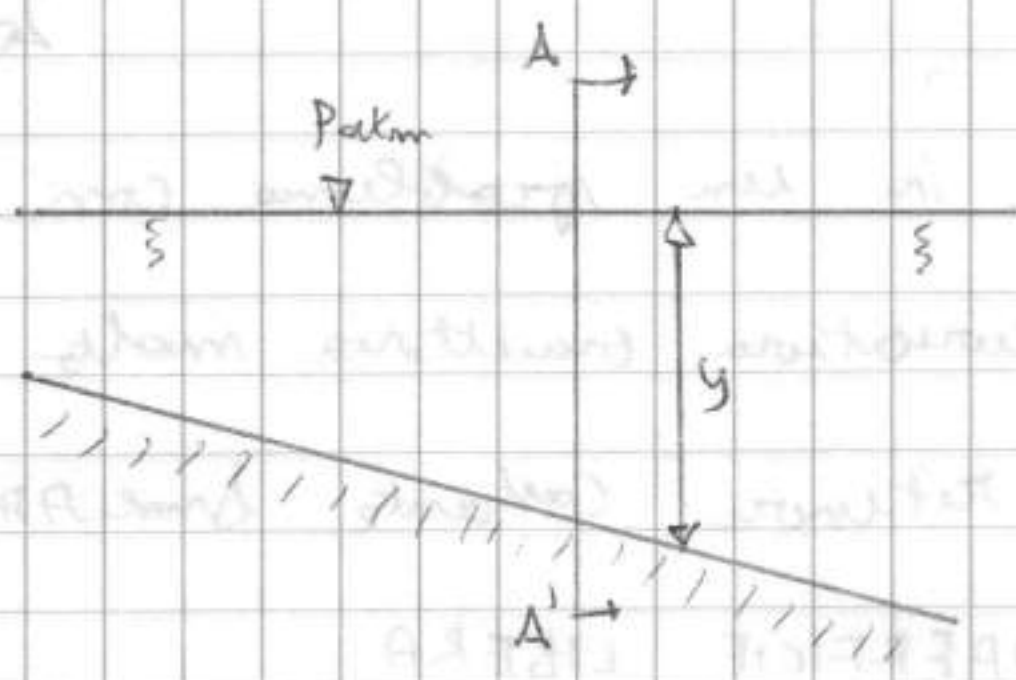
la P in tutti i punti. Posso integrare le variabili di campo nella sezione

e descrivere una variazione in s . Si adottano quindi 2 variabili di campo:
 [maiuscole sempre rispetto alla]

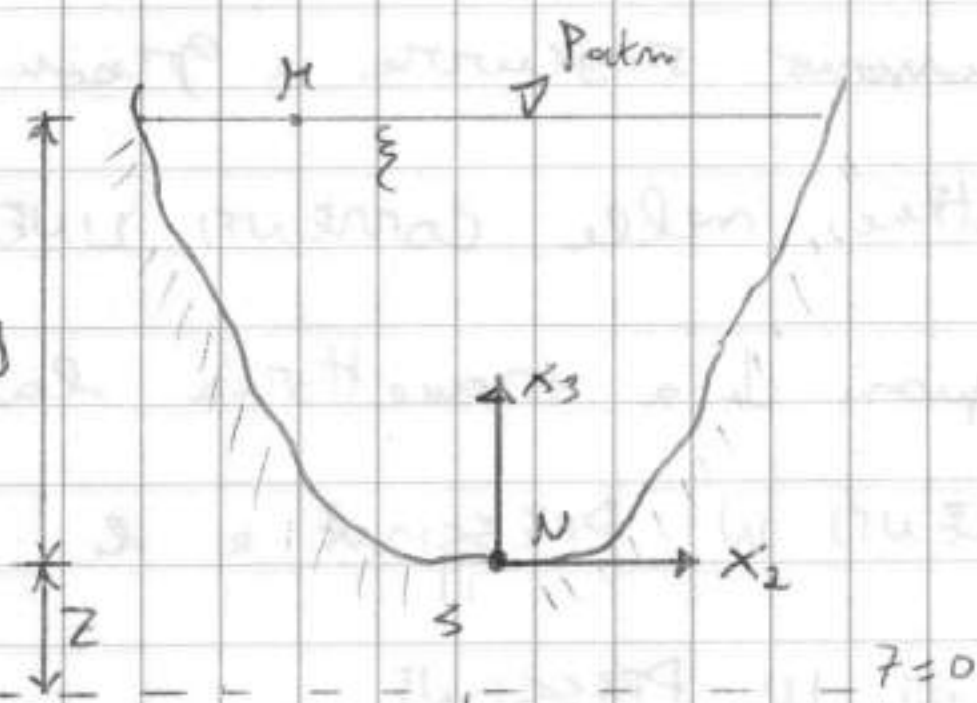
$$1) \underbrace{U(s)}_{[U, \text{media}]} = \frac{1}{A} \int_{AA'} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = \frac{1}{A} \int_{AA'} u_1 \, dA = \frac{Q}{A} \rightarrow \text{la velocità media nella sezione è rapporto tra la portata e l'area della sezione}$$

$$2) \text{ PRESSIONE NEL BARICENTRO DI AA' } \underline{P_0(s)}$$

CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA



TIRANTE IDRICO $+y$



Il p.t. + superficie e' intersezione linea di fondo dell'alveo con la sezione trasversale.

Linea sup. libera può divergere verso alto o basso. Fissando sist. geologico a prima, ho - sempre x linearità - ξ costante su AA' e come variabile su campo oltre alla 1) Velocità media nella sezione in una altra variabile.

Si ha che $\xi_n = Z + y + 0^H$ alt. su p.primo; $\xi_n = Z + \frac{P_n}{\rho g}$. Fissato costante ξ , $\xi_n = \xi_n$, e confrontando $Z + y = \frac{P_n}{\rho g} + Z \Rightarrow$ e' alt. su p.primo nell'area

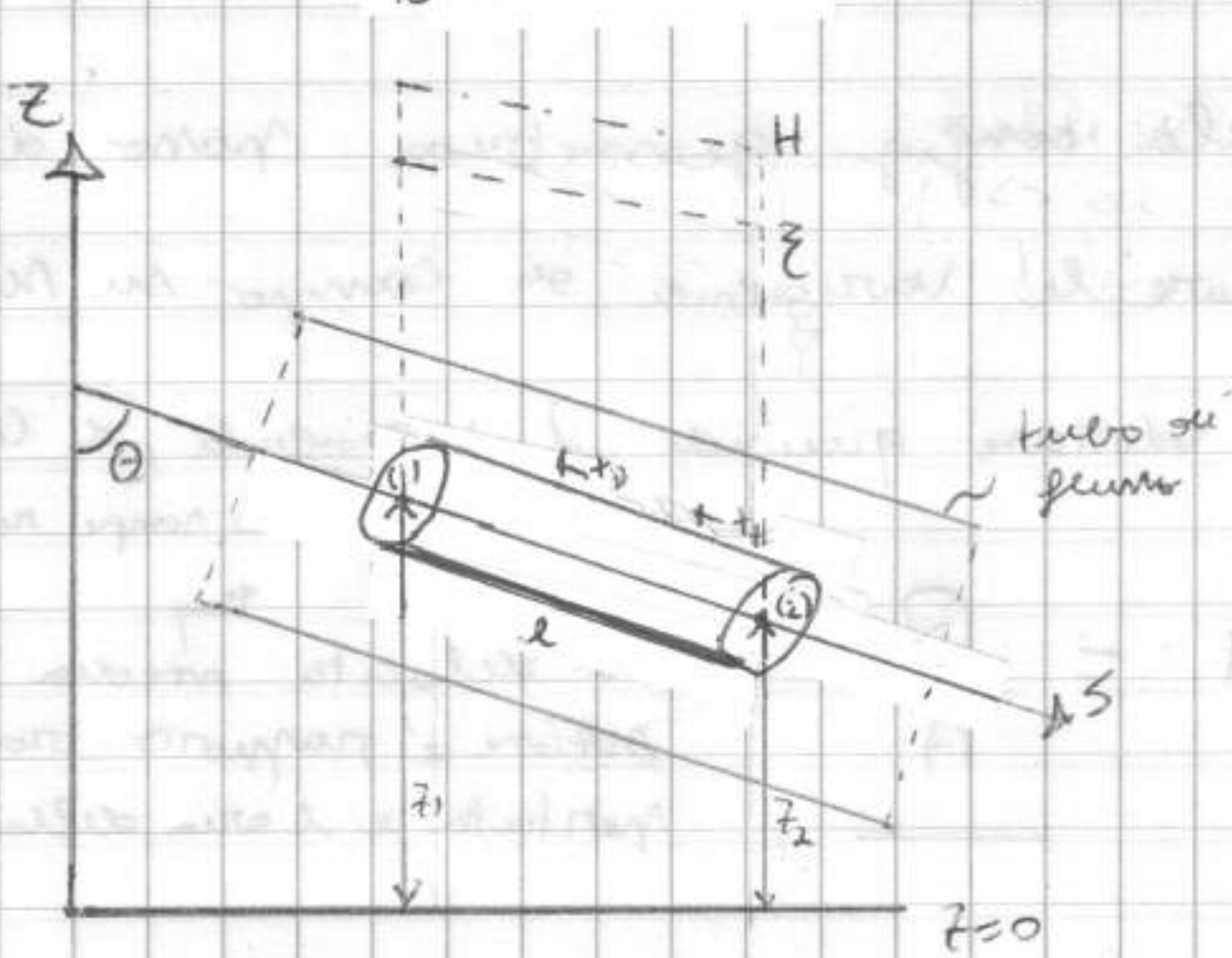
della corrente e' uguale al:

2) TIRANTE IDRICO $y(\xi)$

Se correnti sono lineari si può adottare uno schema geometrico semplificato monodimensionale, altrimenti e' insufficiente.

H

PROSSIMO UNIFORME D CORRENTI IN PRESSIONE



→ Corr. cilindro interno di liquido contenuto in quello esterno ideale. Risoluzione cinematica del tronco di corrente. Tutti coinvolti in movimento, mentre l'acqua lo attraversa la superficie del cilindro no. Due correnti con corr. rettilinea [a qualsiasi valore]

ξ si dice che V e' costante; la linea dei carichi H fornisce il H/V ragione di proporzionalità $[\xi + \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}]$. ξ e H sono due rette che DISCENDONO nel senso del moto, parallele tra di loro. Quindi

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\zeta}{ds} = J \left[\text{PENDENZA PIETOMETRICA} \right] = - \frac{dH}{ds}$$

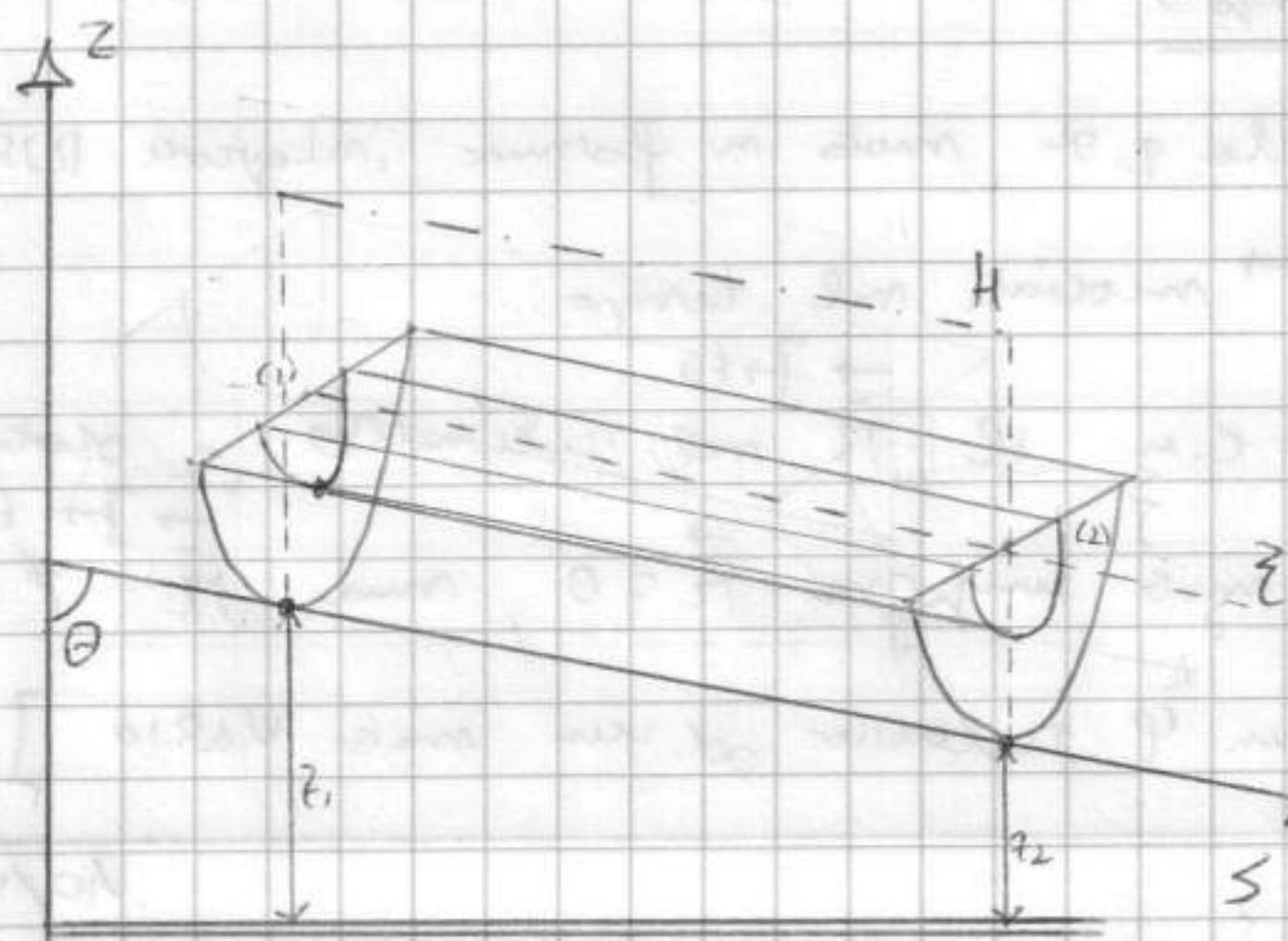
Se le pendenze fossero variabili ci sarebbe ζ ds e $\frac{dV^2}{2g}$ da ds, ma nel moto uniforme queste sono costanti lungo S, ciò implica che ζ e H sono rette e // [pendenza dell'asse costante J].

Pero' la pendenza di H e ζ non e' correlata con la pendenza dell'asse del tubo, in generale non sono //.

Nel verso del moto linea sono SEMPRE surrudenti [Caso reale, con dissipazione] Quando trasporto acqua perdo energia.

t_v e t_t sono raggi degli SFORZI TANGENZIALI: azioni che fluido esterno imprime in cilindro solido. t_v e uno sforzo viscoso [da $\mu \cdot \nabla$] che si oppone al moto che $\nabla \nabla$ non / non maggiore all'interno rispetto all'esterno. Fluido interno muove + velocemente di quello esterno e quindi c'è "resistenza" tra i due fluidi. L'origine di t_t e' legata a flussi di q. di moto TURBOLENTI.

MOTO UNIFORME PER CORRENTI A SUP. LIBERA



Forma alveo e' costante lungo S, cilindrica. Anche qui si comporta cilindro fluido intorno, ma deve comunque mantenere sopra la sup. libera. S congiunge p.ti + superiori dell'alveo con pendenza θ non qualunque, ma $\theta \in (0, \pi/2]$; alveo

DEVE essere ascendente, DECLINO nel senso del moto [in natura n. può avere moto CLIVO ma non sarebbe moto uniforme]. Anche qui $\zeta // H$, ma ζ ALZA in SUP [da y] \Leftrightarrow automaticamente individuata la linea di superficie libera. Anche qui $\frac{d\zeta}{ds} = - \frac{dH}{ds}$ ma non anche uguale alla If, PENDENZA DELL'ASSE DEL CANALE $\left[= - \frac{dt}{ds} \right]$

Qui non //; $\frac{dH}{ds}$ è l'energia meccanica che si perde nell'avanzamento. Se moto è uniforme delle bilanciare l'energia. In c. in p.m. la perdita di carico è fornita proprio da J , cioè dalle variazioni di energia di pressione. Se c'è ∇P nel verso del moto ha conseguenza di movimento della massa d'acqua, ciò è possibile se campo di moto è irrotazionale (e quindi prima $J \propto \frac{dv}{dr}$, mi basta solo ΔP , ex. pompa in fondo o valvola in alto x creare ∇P). Per le cor. a meliora le cond. a contorno impostano su ∇P si fornisce energia: (1) ha $P_{atm} = (2) \Rightarrow$ non c'è variabile di pressione. Di conseguenza $\frac{dz}{dr}$ deve essere legata alle variazioni di quota. Quindi qui l'energia motrice è quella associata al campo gravitazionale terrestre.

In cor. a meliora posso allora moto a lido se orizzontale grazie all'energia cinetica, ma altri moto non uniforme che non riesco a mantenere nel tempo.

[MODELLI QUANTITATIVI] \rightarrow Cond. necessarie x moto uniforme:

- $Q =$ costante lungo s . Quindi $U(s) = \frac{Q}{A}$ deve essere costante in s e quindi lo è anche A è costante lungo s

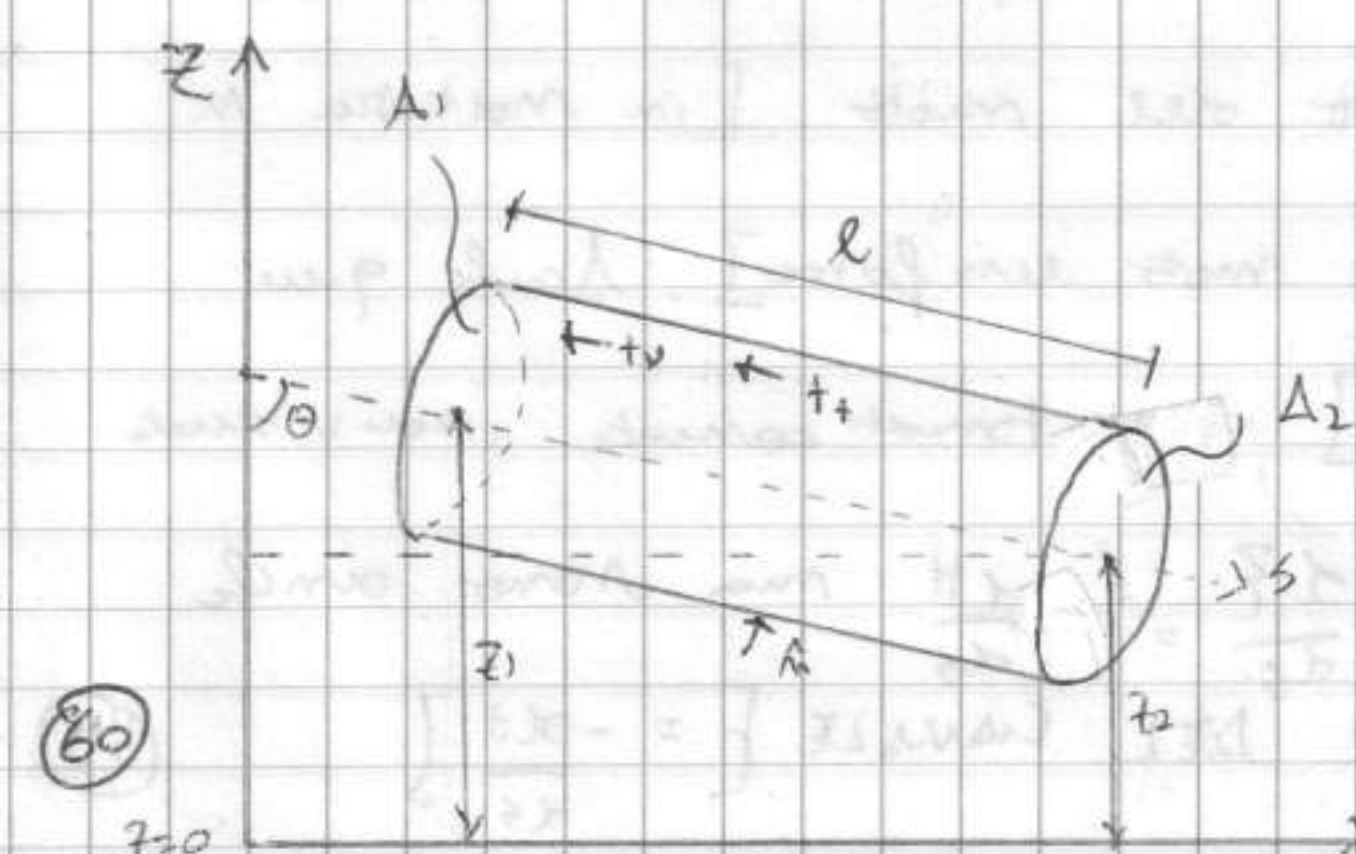
Quadruplico l'eq. di bilancio della q. di moto in forma integrale RIFERITE SEMPRE al VOLUME DI CONTROLLO. \rightarrow mediate nel tempo:

- $\vec{Q} + \vec{\Pi}_P + \vec{\Pi}_V = -\vec{\Pi} - \vec{\Pi}'$. In c.m. il $\vec{\Pi}$ nel cilindro è dato da $\vec{\Pi} \rightarrow t_v$
 $\vec{\Pi}_{entrante} = -\vec{\Pi}_{uscite}$, quindi nel moto uniforme $\vec{\Pi} = 0$, ma $\vec{\Pi}' \neq 0$

[Cmq non si sa come sono, è un q relativo ad un moto VARIO]

10/1/06

MOTO UNIFORME NELLE CORRENTI



Corr. tronco di corrente contornato o da flusso o da flusso e aria. Per risolvere dinamica abbiamo solo eq. continua ed eq. di bilancio della q. di moto.

- Eq. continuità: $Q = \text{costante lungo } S \Rightarrow \text{in m.u. n'ha } U = \text{cost.}$

lungo S e quindi $A = \text{cost. lungo } S$

- Eq. bilancio q. di moto, Eq. di bilancio mediata nel tempo

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_v = \underbrace{-\vec{I} - \vec{A} - \vec{H}}_{\text{m.u.}} \quad \text{Dove:}$$

$$\vec{G} \equiv \int_{\Omega} -\rho g \nabla z d\Omega; \quad \vec{\Pi}_p \equiv \int_{\partial\Omega} \vec{p} \cdot \hat{n} d(\partial\Omega); \quad \vec{\Pi}_v \equiv \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} d(\partial\Omega)$$

Proiettiamo lungo ax S corrente. $\vec{G} = \text{peso del fluido nel volume di controllo: } \rho g A l \cos \theta$

Per le f. di press. ipotizziamo distribuite come la n sulle superfici. Quando proiettiamo i $\vec{\Pi}_p$ sulle sup. laterali sono nulli perché $\hat{n} \perp ax$, rimangono contribuiti A_1 e A_2 . Supponiamo $\xi = \text{cost}$ sulle sezioni e quindi le p variano linearmente nelle sezioni \Rightarrow spinta è pari a spinta idrostatica [in queste cond. assolutamente lineari]: $\vec{p}_1 A_1$ $\xrightarrow{\text{nel crusc.}}$ $\vec{p}_2 A_2$

Sforzi tangenziali su A_1 e A_2 non danno contributo mentre n sulla sup. laterale. Proiettate sulla S : $-\mu \frac{d\bar{u}_s}{dn}$ [μ in ogni p.to sup. laterale dovuto a natura viscosa].

Poiché corr. distribuzione radiale / asimmetrica questo valore è $\approx \text{cost.}$ nel tronco, nulla sup. $\Rightarrow \mu$ totale è contributo + area sup.:

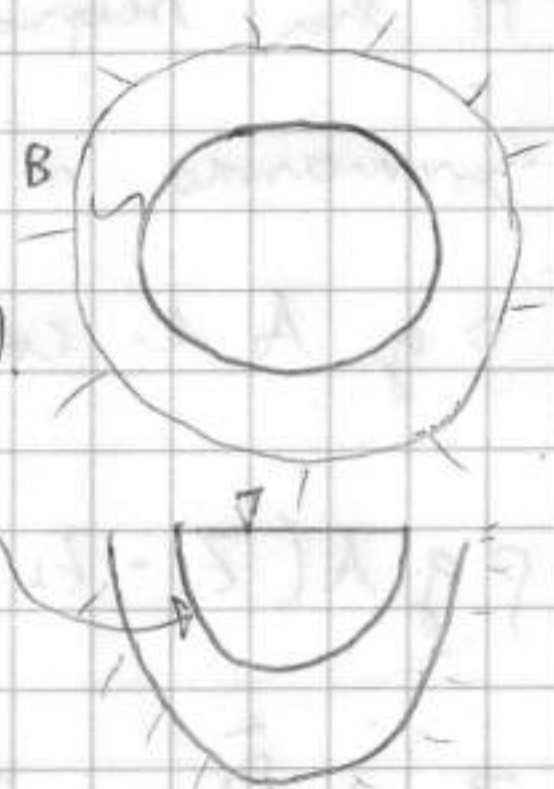
$$\mu \frac{d\bar{u}_s}{dn}, \quad \boxed{B \cdot l} \xrightarrow{\text{CONTORNO BAGNATO}} \left[\overset{\text{perim.}}{\text{perimetro sup.}} \times \text{altezza} \right]$$

Per le correnti in pressione, su tutti i p.to del contorno c'è $\mu \frac{d\bar{u}_s}{dn} \neq 0$ (su B che \equiv perim. geometrico).

Nel tronco a sup. libera, invece, lo μ tg. \exists qui ma sulla sup. c'è contatto H_2O e aria e i $\nabla \vec{v}$ sono nulli [aria ferma, Cmg varia trasversale resp. a U_{H_2O}]

$\vec{\Pi}_v$ non dà contributo su sup. libera, B in questi casi \equiv perim. geometrico - tratto di contatto acqua/aria.

Le verso di $\vec{\Pi}_v$ è "-" perché le V del sistema non nelle altre



pareti e aumentano al centro. C'è resistenza Morato attorno allo movimento del fluido intorno più veloce.

Conr. $-\vec{M}'$ dove $\vec{M}' = \int_{\partial\Omega} p \langle \vec{V}', \vec{V}' \cdot \hat{n} \rangle d(\partial\Omega)$ campo fluttuante Proiettiamo su S.

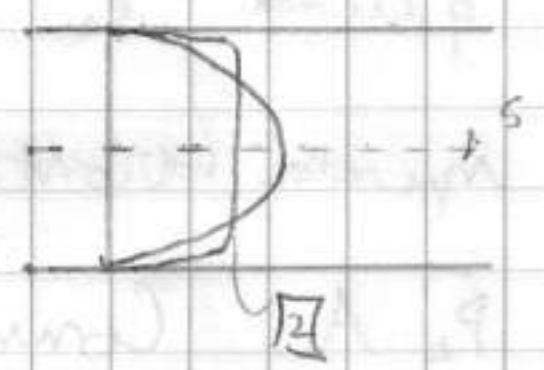
I contributi sono in tutta la sup. laterale. $[M'_{s_1} = -M'_{s_2}$ in m.u., non c'è motivo dinamico per cui queste cond. variano; conseguenza assolutamente rispettata, non è approssimazione] Su S: $[\vec{V}' \cdot \hat{n} = u'_m]$

$p \langle u'_s, u'_m \rangle B.l$ $[M$ costante in sup. laterale]. È vero anche qui che B ha valore diverso nei tipi di corrente? S: Strutturato sup. di separazione

acqua/aria $\nabla M'$ [acqua non va in aria, proprio x def. di sup. di separazione, tutto x aria], quindi anche qui a B n' toglie tratto di contatto.

Nell'eq c'è $-\vec{M}'$, guardando direttamente \vec{M} in conr. bronco di c. a sup. libera. In m.u. la distrib. della U nelle sup.

transversali è PARABOLICA. Nel m.u. turbolento n ha



\vec{U} [a parete = 0, poi è + "uniforme"]. Nella turb.

la parte fluttuante tende a omogeneizzare le differenze del sistema nel quale avviene il moto. C'è isotropia nella q. di moto [quelle

in S > quelle in parete], M. turb. tende a omogeneizzare la distrib. di q. di moto, "trasportando" la q. di moto in S nelle zone dove c'è di meno].

Nel bilancio della q. di moto c'è trasporto da centro a periferia $\Rightarrow \vec{M}$ ha segno negativo. (Moto virtuale t_k)

Sommando n ha:

$$p g A \cos \theta + \bar{P}_1 A - \bar{P}_2 A - \mu \frac{d\bar{u}_s}{dn} B.l = p \langle u'_s, u'_m \rangle B.l$$

$$p g A (Z_1 - Z_2) + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) A = \mu \frac{d\bar{u}_s}{dn} B.l = p \langle u'_s, u'_m \rangle B.l \quad [\text{divido x } p g A]$$

$$\underbrace{Z_1 + \frac{\bar{P}_1}{p g}}_{Z_1} - \underbrace{Z_2 + \frac{\bar{P}_2}{p g}}_{Z_2} = \frac{\mu}{p g} \frac{d\bar{u}_s}{dn} \frac{B.l}{A} + \frac{p}{p g} \langle u'_s, u'_m \rangle \frac{B.l}{A} \quad \text{Sostituendo}$$

(62) n ha: $\frac{Z_1 - Z_2}{l} = \frac{\mu}{p g} \frac{d\bar{u}_s}{dn} \frac{B}{A} + \frac{p}{p g} \langle u'_s, u'_m \rangle \frac{B}{A}$ Se purno

memero ho $\frac{\Delta Z}{\Delta s}$ ma in m.u. $\Delta Z = \text{cost}$, quindi $\frac{dZ}{ds}$. Poiché

$J \equiv -\frac{dZ}{ds}$ è la PENDENZA PIETOMETRICA, cambio di segno.

$$J = -\frac{\mu}{\rho g} \frac{d\bar{u}}{dm} \frac{B}{A} - \frac{\rho}{\rho g} \langle u'_s u'_m \rangle \frac{B}{A} \quad \text{Si definisce il RAGGIO}$$

IDRAULICO: R definito come il rapporto tra area bagnata e il perimetro bagnato: $R = \frac{A}{B}$. Si ha nottuenso e molt. $\times \rho g R$.

$$\boxed{\rho g R J = -\mu \frac{d\bar{u}}{dm} - \rho \langle u'_s u'_m \rangle} \rightarrow \text{Nel moto uniforme la}$$

$\downarrow t_v$ $\downarrow t_t$

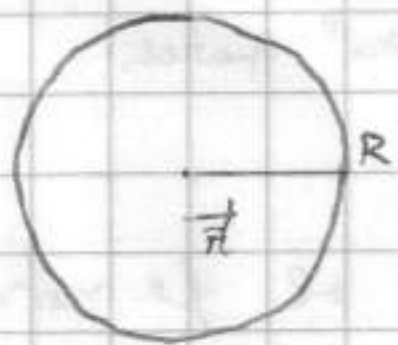
pietometrica ($dh \equiv \text{con } dH/ds$) e quindi le perdite di carico \times unità di lung. sono d alla somma di due azioni che si oppongono al mantenimento di moto, ovvero l'azione viscosa $[t_v]$ e l'azione del trasporto di quantità di moto turbolenta $[t_t]$.

la somma dei due termini è uno sforzo tangenziale totale t .

Analisi dei contributi per le correnti in pressione.

Corrente che scorre in condotto di sezione circolare e

R da 0 a R . Calcoliamo R che è $f(r)$:



$$R(r) = \frac{A(r)}{B(r)} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

Quindi la relazione è $\rho g \frac{r}{2} J = t_v + t_t$. Se faccio una rapp. grafica [M7. longit. condotto], t varia LINEARMENTE al variare dello dist. dall'asse.

Il valore massimo $[t_0]$ è alla PARETE.

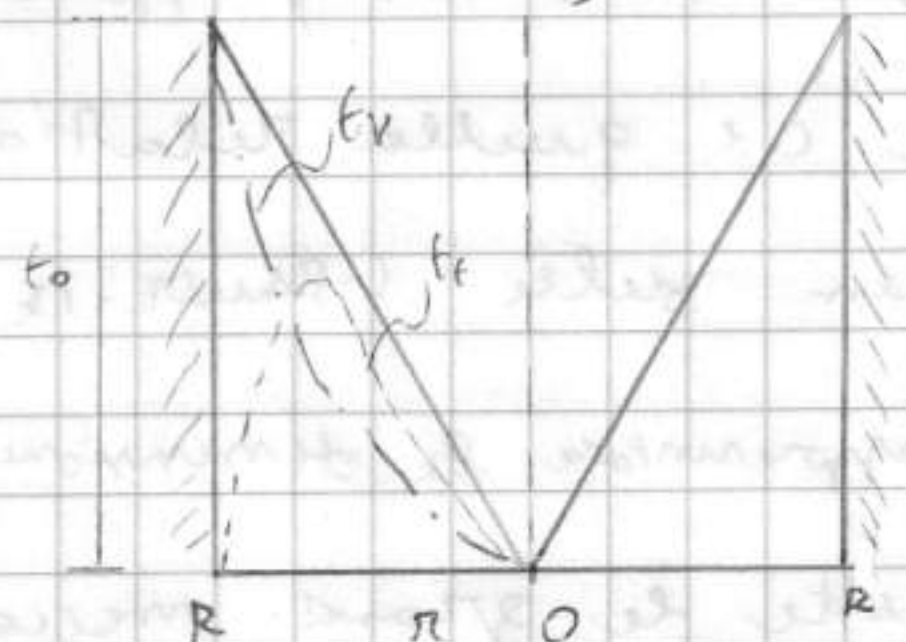
Ma come variano i singoli contributi?

[la loro Σ è lineare]. Si ha che $t_t = 0$ alla

parete, ma crescono rapidamente fino ad un max e poi \rightarrow a diminuire.

t_v invece è max alla parete e poi diminuisce direttamente a 0.

All'aumentare del n. di Rey il max di t_t aumenta e si avvicina alla parete. C'è zona vicino a parete dove dinamica è



prevalentemente viscosa e c'è zona turbolenta prevalentemente turbolenta.

Ma non mi basta, ho 2 incognite, T e t : $pg R J \equiv t$. Si cerca di integrare questi termini con osservazioni sperimentali. Si può usare l'ANALISI ADIMENSIONALE.

Con un tronco di corrente lungo l con area A e B in m^2

cerchiamo che per far passare Q nel tronco

abbiamo vincere azione di resistenza. Oppure.

ci sia che T è data alcuni fm. fisici:

$$\varphi(T, U, \rho, \mu, R, \epsilon) = 0$$

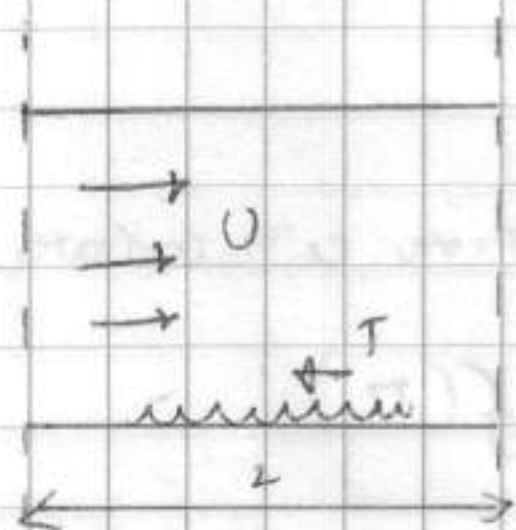
[portata, proprietà fisiche fluido, geometria dominio, natura pareti contatto]

si può avere superficie \pm liscia o \pm scabra]

È relazione funzionale φ che non conosco. Dati certi valori ho unq la stessa T .

12/1/06

[Moto uniforme $pg R J = t_0$]



Stanno forze che si oppongono a moto fluido

in condotto. Queste T sono legate a

$$f(T, U, \rho, \mu, R, \epsilon) = 0$$

sim. mezzo "malvestita" pareti

Ignoriamo la meccanica e osserviamo il fenomeno.

È un sistema dell'analisi dimensionale. Se $f(\dots) = 0$ delle

relazioni tra gruppi di grandezze omogenee ricavate da queste.

Se c'è quella relazione con n grandezze che intervengono, inseriamo le

num. delle grandezze fondamentali [le cui dimensioni fisiche permettono di

rappresentare le dimensioni di tutte le altre grandezze che partecipano nel fenomeno]

Tutte le grand. meccaniche hanno sim. esprimibili in rel. a 3 grand.

al max

fondamentali $[M, L, T]$.

Pensiamo qui come gr. fond. da U, ρ, R . TH sia di date n grandezze

e m gr. fond., È relazione tra $(n-m)$ gruppi omogenei.

$$\textcircled{64} \Rightarrow \varphi \left(\frac{T}{\rho U^2 R^2}, \frac{\rho U R}{\mu}, \frac{\epsilon}{R} \right) = 0$$

→ relazione che lega 3 gruppi di grandezze (grazie a TH di BUCKINGHAM)

Potremmo esprimere uno dei termini rispetto all'altro

$$\frac{T}{\rho U^2 D^2} = \psi \left(\underbrace{Re}_{n. \text{ REY}}, \underbrace{\frac{E}{D}}_{\text{SCABREZZA RELATIVA}} \right) \quad \text{Si sa che } T = B L t_0 = \frac{k D^2}{8} t_0 \quad \text{Quindi}$$

$B \propto L$ infatti come $d \propto D^2$

$$\frac{k D^2 t_0}{\rho U^2 D^2} = \psi \Rightarrow t_0 = \rho U^2 \frac{\psi}{k} \quad \text{Introduco } \frac{k}{8} \lambda (Re, E/D) =$$

$$= \psi (Re, E/D) \quad \Downarrow$$

$$t_0 = \rho U^2 \frac{\lambda}{8} \quad / \text{Prendiamo ora l'eq di bilancio } t_0 = \rho g D J$$

Unificando l'analisi sperimentale e teorica si può dire che

$$\rho g D J = \rho U^2 \frac{\lambda}{8} \rightarrow \boxed{J = \frac{U^2}{2g D} \lambda (Re, E/D)} \quad \text{+ LEGGE DI MOTO UNIFORME DI DARCY-WEISBACH}$$

Rel. m. uniforme a d.d. che la perdita di carico

\times unità di lunghezza è però non pari all'altera cinetica media /

U e D e il termine di proporzionalità è una $f(Re, E/D)$

FUNZIONE DI RESISTENZA \checkmark

$\lambda (Re, \frac{E}{D})$, fun. di sole 2 variabili indipendenti dove

però $Re \equiv \frac{\rho U D}{\mu}$. Cmq in Re e E/D hanno stesso

valore anche λ ha stesso valore. E semplificata l'analisi di λ .

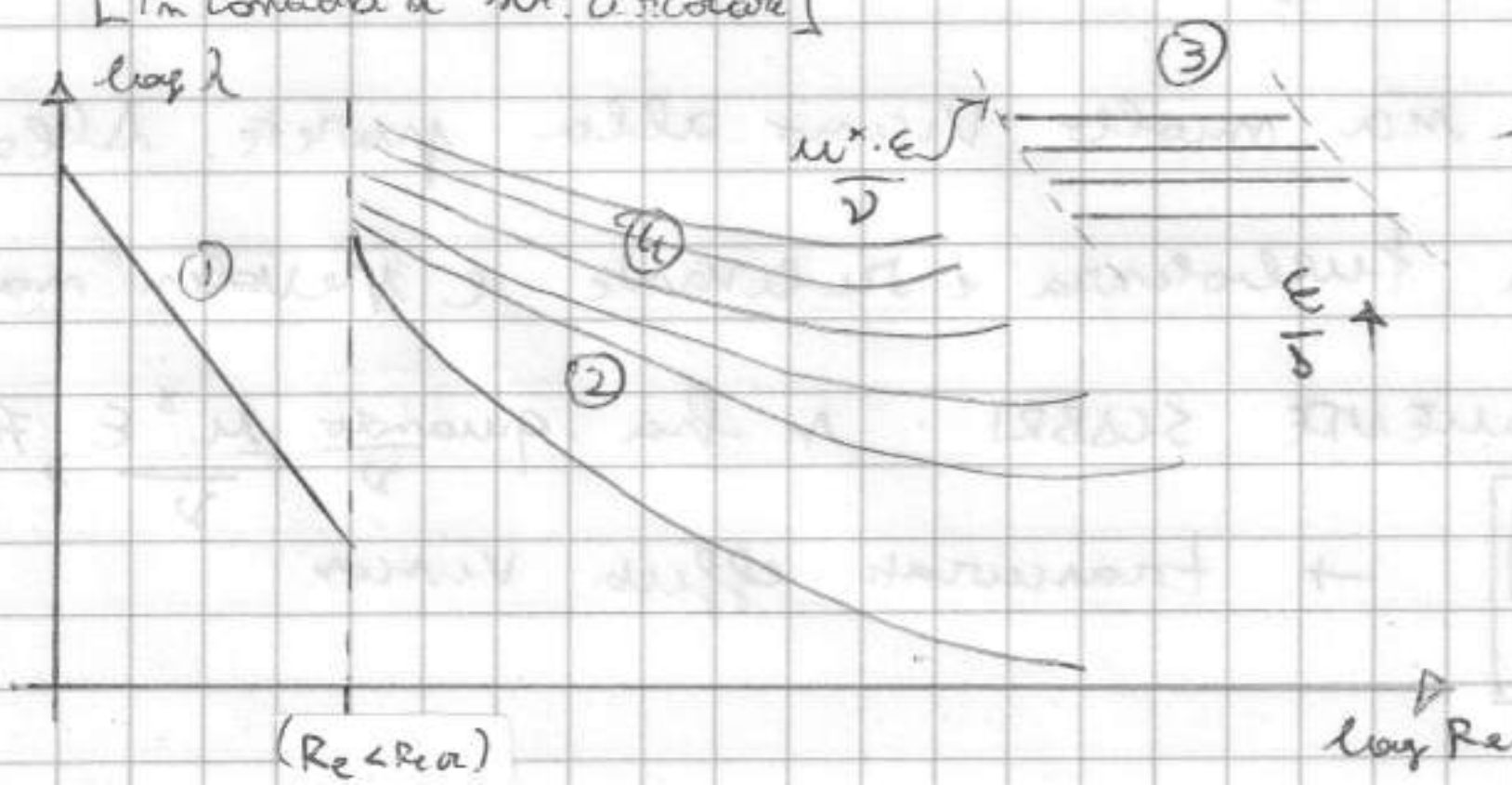
Per definire λ \times tutte le cond. di m. uniforme a non voluti 100 anni di studi (fino al '60).

Per esprimere si dividono i campi delle correnti a m. libera e impur.

- CORRENTE IN PRESSIONE.

$$D = \frac{D}{4} \quad \text{per } \textcircled{\text{D}} \quad \text{Sostituiamo } J = \frac{U^2}{2g D} \lambda (Re, E/D) \quad \text{dove } Re = \frac{UD}{\mu/\rho + V}$$

[In condotta a m. circolare]



+ ABACO DI MOODY [MOLTA

bioparametrica \times mappatura computerizzata]

Regimi distinti da Re . Per

$Re < 2300$ non è cost. univ. di sua
 $Re < Re_{crit}$ fenomeno e da quale dei valori

① Nel moto laminare uniforme $\lambda = \frac{64}{Re} \rightarrow$ è f di Reynolds (f. iperbolica che nell'abaco è una retta). [ma m.u. è praticamente solo in condotti capillari]. E/D compare solo nello stesso fenomeno: qui abbiamo introdotto SUBRETH, ma ciò influenza solo il moto turbolento \Rightarrow cond. al contorno che non influenza lamine.

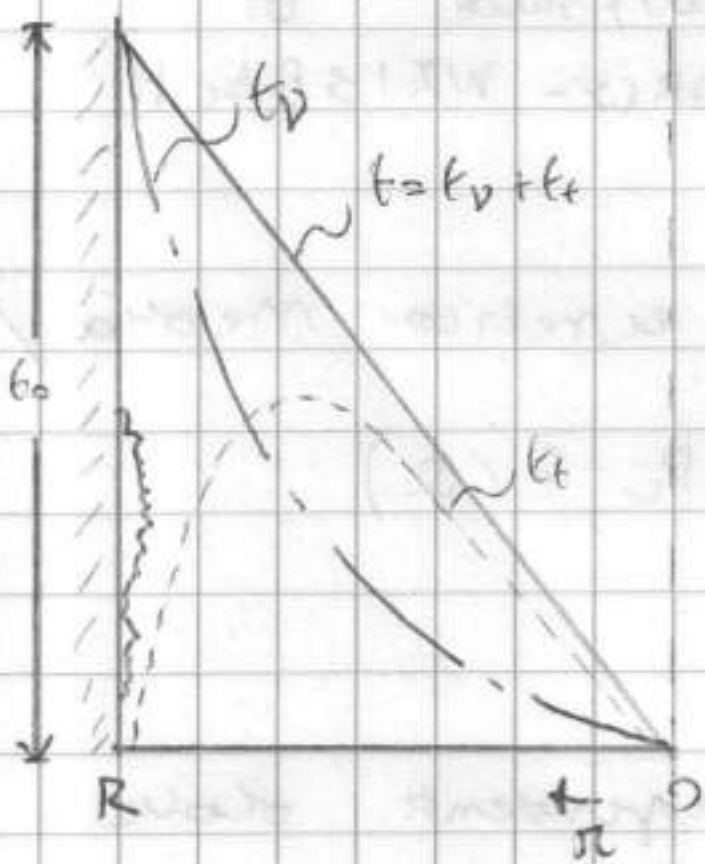
② Nel m.u.t. con $Re > Re_{crit}$. \rightarrow moto - regime di sovraraffinazione:

- m.u.t. nei TUBI IDRAULICAMENTE LISI:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.5}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

\rightarrow [applicazione dei modelli teorici ai dati sperimentali det. la forma]

Anche qui λ è solo da Re . Analizz. t_v e t_t .



Supponiamo che parete abbia viscosità. Zona di striscio vicino alla parete è praticamente dominata da dinamica viscosa, t_t molto piccoli, dinamica praticamente laminare. Se \rightarrow cond. dove il moto è lam. siamo in situazione dove turbolenza è trascurabile in zona scalda \rightarrow è la

cond. di m.u.t. in tubi idraul. lisci. Ma quando parliamo di tubi (idraul. lisci) è da cond. dinamica e non solo geometrica. [in Re curva, max t_t si alza \rightarrow a parete e non può trascurare]. C'è parametro che quantifica questa condizione:

$\mu^+ \epsilon$ \rightarrow VELOCITÀ DI STRISCIO ($\mu^+ = \sqrt{t_o/\rho}$) \rightarrow CONDIZIONI DINAMICHE

\downarrow

det. TIPO DI FLUIDO

Se $\frac{\mu^+ \epsilon}{\nu} \leq 5 \div 7$ siamo in tubi idraulicamente lisci.

Supponiamo ora che max t_t sia molto vicino alla parete. Allora nella zona vicino a parete turbolenza è rilevante e t_o minimale.

③ - m.u.t. nei TUBI COMPLETAMENTE SUBRI: μ^+ ha $\mu^+ \epsilon > 70 \div 100 \log$

e $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.71 D} \right) \rightarrow$ trascurati effetti viscosi

Ho tante Pette parametrizzate x diversi valori di E/D . Se $E/D \uparrow$, $\lambda \uparrow$.

Curva n ha $n = \frac{u^* \cdot E}{V} = 70$.

④ C'è zona su bruci dove $\frac{u^* \cdot E}{V} \in [5, 70]$. Dinamica influenzata sia da V che da t . Si hanno solo dei dati sperimentali, Σ di punti interpolati che stanno curve che \rightarrow asintoticamente per alti Re a ② e per bassi E/D a ③.

Colebrook-White propone legge matematica x rappresentare ④.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{E}{3.7 D} \right) \rightarrow \text{Rappresenta bene solo asintoticamente} \quad \text{③, anche l'asintotico di } \lambda$$

in TUTTO il moto turbolento. (for i lim di Re).

Per risolvere problemi di m.u. ci si può riferire a

$J = \frac{U^2}{2gD} \lambda$ e determinare λ con questa formula. ($\lambda = \frac{64}{Re}$ in mol.)

$J \equiv \lambda \frac{U^2}{2gD} \quad [U = \frac{Q}{A}], \quad \lambda = \lambda(Re, E/D) \rightarrow$ sostituiamo.

$$J = \lambda \frac{Q^2}{2g D A^2} = \lambda \frac{Q^2}{2g D \frac{\pi^2 D^4}{16}} \rightarrow J = \left(\frac{8\lambda}{g \pi^2} D^{-5} \right) Q^2. \text{ Se introduco}$$

$\gamma(D) \equiv \frac{8\lambda}{g \pi^2} D^{-5}$, posso riscrivere l'eq di D-W in forma + breve:

$$J = \gamma(D) Q^2 \quad \text{e } J \text{ non è al quadrato della portata e } \gamma(D)$$

che è fortemente dipendente dal diametro $[D^{-5}]$. In passato, quando non c'erano queste eq, si usavano delle espressioni

empiriche x quantificare la resistenza ["formule antiche"] \rightarrow

$\gamma(D) = \beta_{\pi} D$ dove β_{π} è costante numerica determinata sperimentalmente in $f(\text{velocità})$ costante. $\Rightarrow \gamma(D) = f(E, D)$ [non influenzata da m. di Reynolds]. Pensiamo allora

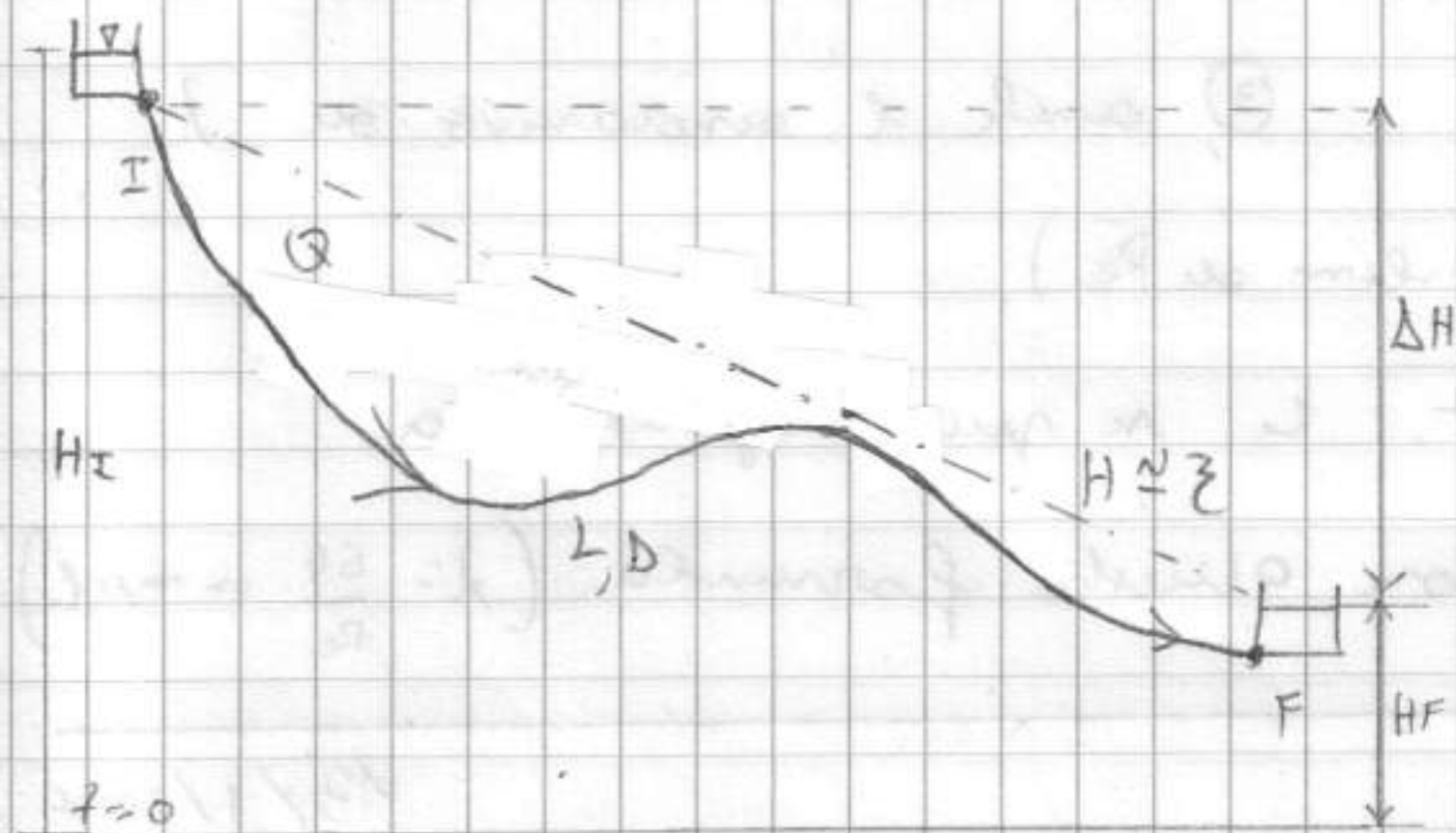
x tutto questo. Ragionando con for. ant. (e m. di Reynolds) vogliamo $\gamma(D)$ riguardo



a E e D misurando una λ anidrica. Ma se siamo in R^* attribuiamo il valore di resistenza $*$, mentre il corretto è $\Pi \Rightarrow$ sottostimato per. Valutazione con f.a. corretta solo per Re alto. C'è campo ampio nel quale si ricorrevano a errori gravi. Quando si fecero esperimenti $\times P_r$ e $\gamma(D)$ si era in una fase tecnologica tale che si era sempre in Re molto alti a causa del tipo e della dimensione delle condotte e degli acquedotti. Oggi costruzioni idrauliche sono "migliori".

H

MOTO UNIFORME NELLE LUNGHE CONDOTTE



Condotta unico di diametro D , E , lunghezza L . Devo conoscere il carico in I e F . Si pone un manometro in I , c'è carico H_I [car. idraulica, può essere anche pompa] lo stesso in F , carico di H_F metri

Se i valori sono costanti \Rightarrow c'è moto uniforme? Campo di moto non deve avere a_t e a_c . Moto stazionario con traiettorie rettilinee delle allineate in condotte rettilinee. Ma qui ci sono variazioni. Ma cosa si sa? e si differenzia rimp. a quelle verticali [ΔH sono $\approx 10 \div 100$ mt], mentre \times parlare di lungo condotte si tratta di km di condotte. C'è portata Q , fluido che nel moto perde carico [$J \equiv -\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{dH}{ds}$]; la linea dei carichi è una RETTA. Esempio $H = \zeta + \frac{v^2}{2g}$ altro ζ + piccola, ma di quanto? $v \approx 1$ m/s, $\frac{v^2}{2g} \approx 5$ cm! \Rightarrow differenza - rispetto a carichi che variano di decine di mt - è trascurabile. Come calcolare?

$-\frac{dH}{ds} = \gamma(D) Q^2$; integrando da i a f si ottiene:

$$-\int_I^F dH = \int_I^F \gamma(D) Q^2 ds \rightarrow \underline{H_I - H_F} = \gamma(D) Q^2 \int_I^F ds = \underline{\gamma(D) Q^2 L}$$

(68) Le cariche ΔH permette di parr questa portata. Fluido si muove da

carico maggiore o minore. $\Delta H_{IF} = \sum \gamma(D) Q^2 L$ si può usare nella
 progettazione e nella verifica. Ma devo applicare $\gamma(D)$ e quindi
 $\lambda(Re, \epsilon/D)$. $Re = \frac{UD}{\nu} \rightarrow Q/\Delta$! Devo fare colco x colco Q ma
 me lo ritrovo tra variabili! \rightarrow Si fanno colco iterativi. A l
 inizialmente attribuisco f. antica, valore asintotico. Verifico R eventualmente
 colco 1 x 2 approx, U e Re. Sistema converge stazionalmente a
 soluzione, det. Re e quindi Q. [n uso λ in un range ragionevole]
 generalizziamo. Si può avere Σ situazioni dove L è realizzato con
 diversi tronchi. Dico che

i valori saranno costanti a
 tratti. Quindi normalizzo:

$$\Delta H_{IF} = \sum_j \gamma(D_j) Q_j^2 L_j \text{ dove}$$

J è l'indice delle condotte. In A od ex posso
 avere portata di portata, quindi ho Q_j . Ho Σ rami di condotte
 dove a tratti c'è m.u.

lungo L carico può essere modificato da azione esterna, ex Pompe in
 IS [aumenta numero] \rightarrow aumenta carico di $\sum H_i$. Supponiamo che in
 BF c'è TURBINA, m.u., che preleva Em. dal fluido. Macchina e' tale
 che preleva $\sum H_2$ di carico. [n sta e n preleva energia].

Fluido parte da I e arriva con certo carico nella pompa [dim.
 tranc.] \rightarrow c'è DISCONTINUITA' su carico, c'è ADAPTO ESTERNO energia. Variamo
 fenomeno e arriva in turbina, discontinuità in diminuzione.

All'eq n aggiungiamo le discontinuità:

$$\Delta H_{IF} = \sum_j \gamma(D_j) Q_j^2 L_j + \sum_i \pm \sum L_i \rightarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITA' DEI CARICHI}$$

["+" $\sum H_2$ a turbina, "-" $\sum H_1$ a pompa]

H

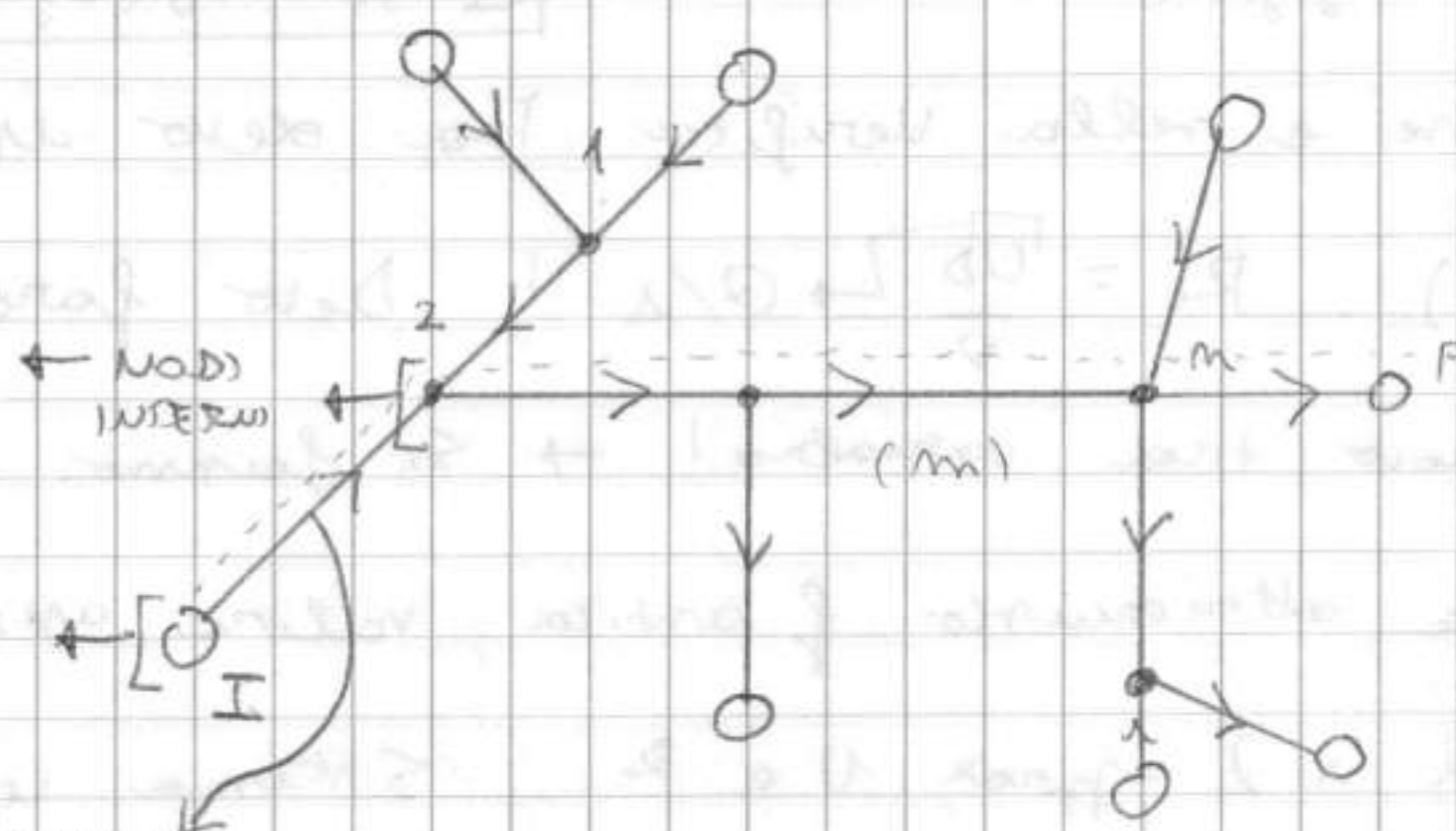
RETI DI CONDOTTE

Ex: Rapp. topologica (in piano) di una rete.

Punti nei quali ci sono dei
caricamenti $[Q, D \dots]$

Dato conoscere
il carico

Cond. di
m. u. \rightarrow RISULTATO
DELLA RETE



Nella rete si possono individuare M modi interni e M esterni.

Problema è di progetto e di verifica. Si usano eq. cont. e conr.

e di moto. Conr. genera idea che

flacciditate il modo \rightarrow l'eq. di continuità

mi dice che massa è costante. Si ha che

$$\sum_k \pm Q_k = 0, \text{ Possiamo scrivere } n \text{ eq. su}$$



continuità di massa dove Σ è estesa a tutti i rami. Poi applico l'eq. di continuità dei carichi. Devo fissare i versi di percorrenza dei consotti, inizialmente in maniera arbitraria. Devo stare attento affinché nei modi interni sia rispettata con la continuità (verifica logica e qualitativa dei versi).

Passo da ex da I a F, quindi eq. D-W è integrato. A sequenza posso scrivere eq. su l'eq. \Rightarrow altro certo numero di eq. su l'eq. e.

Si verifica che posso scrivere solo $M-m$ eq. linearmente INDIPENDENTI. Devo vedere che nelle equazioni ci sarà almeno 1 ramo non incluso nelle altre eq.

Sistema risolve il problema di verifica. [pro. di prog. è ancora inolet.]

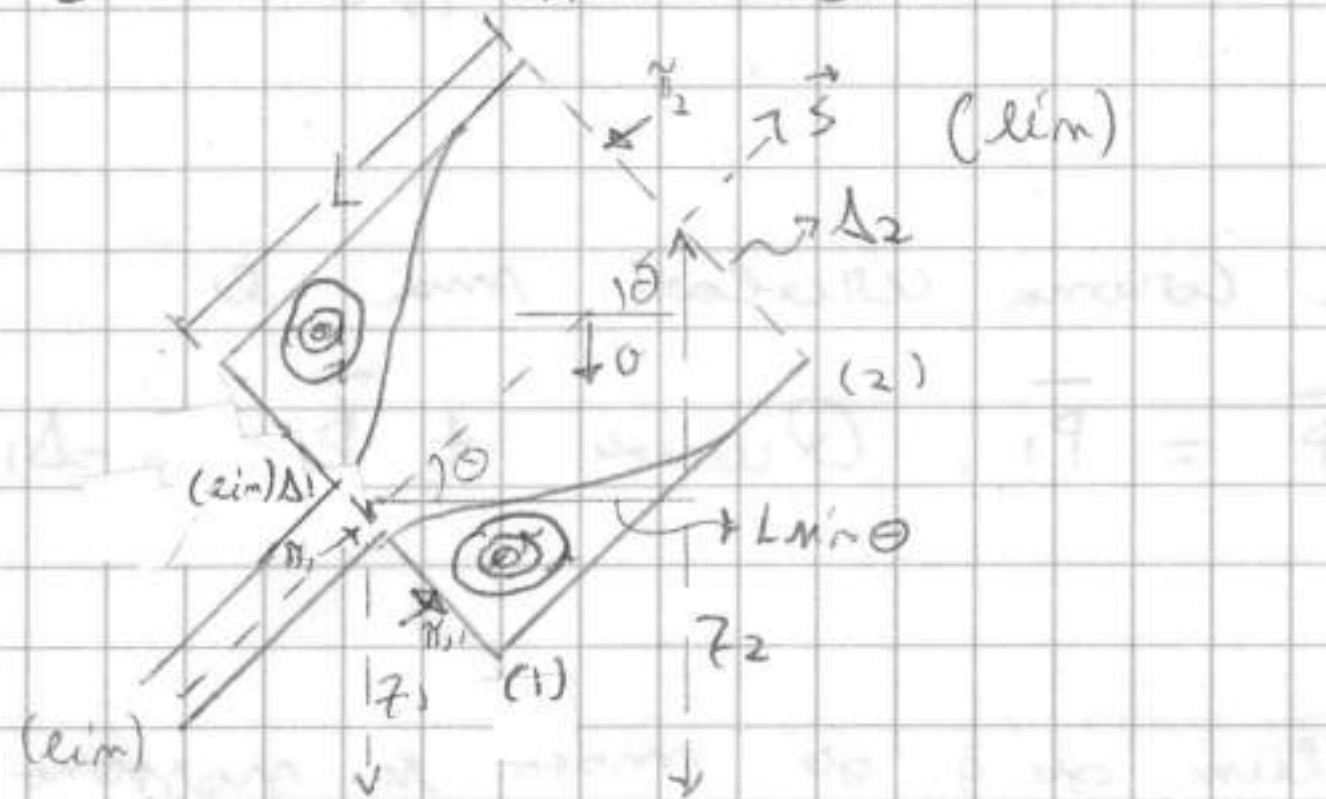
PROBLEMI DI MOTO PERMANENTE LOCALIZZATO

19/1/06

Nella rete di consotti possono esserci guasti in alcuni
alberi, allora, ci saranno locali con consotto rilevante \Rightarrow
moto localmente non è uniforme.

70 (\rightarrow)

BRUSCO ALLARGAMENTO



$t=0$

Conosciuto punto immediatamente in sezione più larga, cambia il deflusso. Corrente è accelerata ($Q > e V <$).

Tubo su flume non si allarga immediatamente (x continuità).

Corrente \rightarrow ad occupare lo

spazio \Rightarrow M generano filati fluidi che allargano t. su flume.

Lunghezza del tratto in accelerazione $[L]$ è limitata, $\approx 6 \div 8$ volte

il diametro + piccolo \Rightarrow fenomeno è LOCALIZZATO.

I zone che circondano t. su flume; c'è tubo centrale che trasporta materia, mentre in quelle laterali c'è fluido che ricircola, rimane confinato [confine ideale, può esserci scambio; contr. Matematiche]. E materia fluida in movimento ha bisogno di energia.

Si può dire che: campo moto è complesso, ma se contr. il vel. su controllo \equiv tratto su corrente da A, a A2 [ovvero tra due mt. dove

moto è lineare]. Eq. bilancia q. su moto DEVE essere soddisfatta:

$\vec{G} + \vec{\Pi}_P + \vec{\Pi}_V = -\vec{\Pi} - \vec{\Pi}'$ ("I" non compare xkè moto nel tempo Matematico).

Fenomeno si sviluppa in spazio BREVE \Rightarrow nulli gli sforzi viscosi, la loro eliminazione è trascurabile (trattiamo problema come se fosse un fluido PERFETTO). 1° IP: $\vec{\Pi}_V \approx 0$

Supponiamo che $\vec{\Pi}'$ siano moderatamente bilanciati [rigorosamente vera in m.u.; in m. formante è approx. accettabile \rightarrow trasporto non è molto turbato, ⑥ è confinato] 2° IP: $\vec{\Pi}' \approx 0$

Esprimiamo il bilancio: $\vec{G} + \vec{\Pi}_P = -\vec{\Pi}$.

Proiettiamolo su S): $-\vec{G} =$ peso sul tratto su elemento.

$\vec{G} = -\rho g A L \sin \theta \hat{n}$

$-\vec{\Pi}_P$) componente Morosi laterale proiettata su S sono nulli. ⑦

In A_1 e A_2 moto è lineare, quindi la P è distribuita con legge lineare.

Simultanea è quindi \vec{P} ^{nel baricentro} \vec{P}_{MP} .

$\vec{H}_P = \vec{P}_1 \Delta_1 + \dots$ poi c'è risultante in corona circolare, ma è c'è moto turbolento. Si fa ipotesi, $\vec{P} = \vec{P}_1$. Quindi $\vec{P}_1 (\Delta_2 - \Delta_1)$

In A_2 è semplice, $-\vec{P}_2 \Delta_2$

$(-\vec{H})$ data da linearità in (1) e (2) il flusso di q di moto si possono trovare: $-\rho U_1^2 \Delta_1 + \rho U_2^2 \Delta_2$ [flusso esce in A_2 ma normale è interna, cambia segno]. Quindi normalizzato si ha:

$$-\rho g \Delta L \sin \theta + \vec{P}_1 \Delta_1 + \vec{P}_1 (\Delta_2 - \Delta_1) - \vec{P}_2 \Delta_2 = -\rho U_1^2 \Delta_1 + \rho U_2^2 \Delta_2$$

$$(z_1 - z_2) \rho g \Delta_2 + \vec{P}_1 \Delta_1 + \vec{P}_1 \Delta_2 - \vec{P}_1 \Delta_1 - \vec{P}_2 \Delta_2 = -\rho U_1^2 \Delta_1 + \rho U_2^2 \Delta_2 \quad [\text{div.} \times \rho g \Delta_2]$$

$$(z_1 - z_2) + \frac{\vec{P}_1}{\rho g} - \frac{\vec{P}_2}{\rho g} = -\frac{U_1^2}{g} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} + \frac{U_2^2}{g}; \text{ al 1° membro abbiamo}$$

proprio $z_1 - z_2$ e al secondo c'è termine che presenta 2 variabili, ma

se vogliamo $1 \Rightarrow$ abbiamo l'eq. della portata. Eq. di continuità: $q = \text{cost.}$

lungo $s \Rightarrow U_1 \Delta_1 = U_2 \Delta_2 \rightarrow U_1 = U_2 \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$. Sostituiamo

$$z_1 - z_2 = -\frac{U_2^2}{g} \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} + \frac{U_2^2}{g} \Rightarrow z_1 - z_2 = \frac{U_2^2}{g} \left(1 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right)$$

Quota piezometrica aumenta di valore da 1 a 2 $[\Delta_2 > \Delta_1]$, 2° membro

è < 0 e $z_2 > z_1$, aumenta nel senso del moto. Peto da (1) a (2)

accelera, quindi portata E.c.m. aumenta quota. Pressione aumenta nel

verso del moto ed è la causa del RIVIRCOLO. Ma questi moti dove

si pone energia? Collociamo la diff. di carico:

$$H_1 - H_2 = z_1 + \frac{U_1^2}{2g} - z_2 - \frac{U_2^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g} \left(1 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = (\text{anche})$$

qui con eq. continuità solo $U_1 = f(U_2)$:

$$= \frac{U_2^2}{g} \left(1 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) + \frac{U_2^2}{2g} \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} - \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow \text{con pochi e semplice}$$

$$\text{passaggi} \Rightarrow H_1 - H_2 = \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} - 1 \right)^2 \quad \left[\text{e} \right] \quad z_1 - z_2 = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} - 1 \right)^2 > 0$$

② quell'ordine di qualche unità. \rightarrow FORMULE DI BORDA

Quindi $H_1 - H_2 = \sum \frac{U_2^2}{2g}$, e' proporz. all' altezza cinetica del moto a valle, ma essendo dell'ordine di al max 20-30 cm, essendo in lunghi condotte i termini si trascurano, ma ESISTONO. Quindi se tratto prob. di moto in rete + piccola, l'ordine di grandezza del termine, sommato + volte, va considerato.

10.11.8.

Siamo partiti da ipotesi di carico costante, ma c'è presenza di carico.

Nella tratta integrale teoricamente non corr. dinamica, ma in realtà e' stata fatta, da Borsari, corr. $\bar{P}_i = \bar{P}$ giustificazione meccanica trovata.

Zona di separazione e' / $P_{intere} = P$ zona di ricircolo (verifica a posteriori). Presenza di carico a causa di 7.9.11.8. trattate considerando

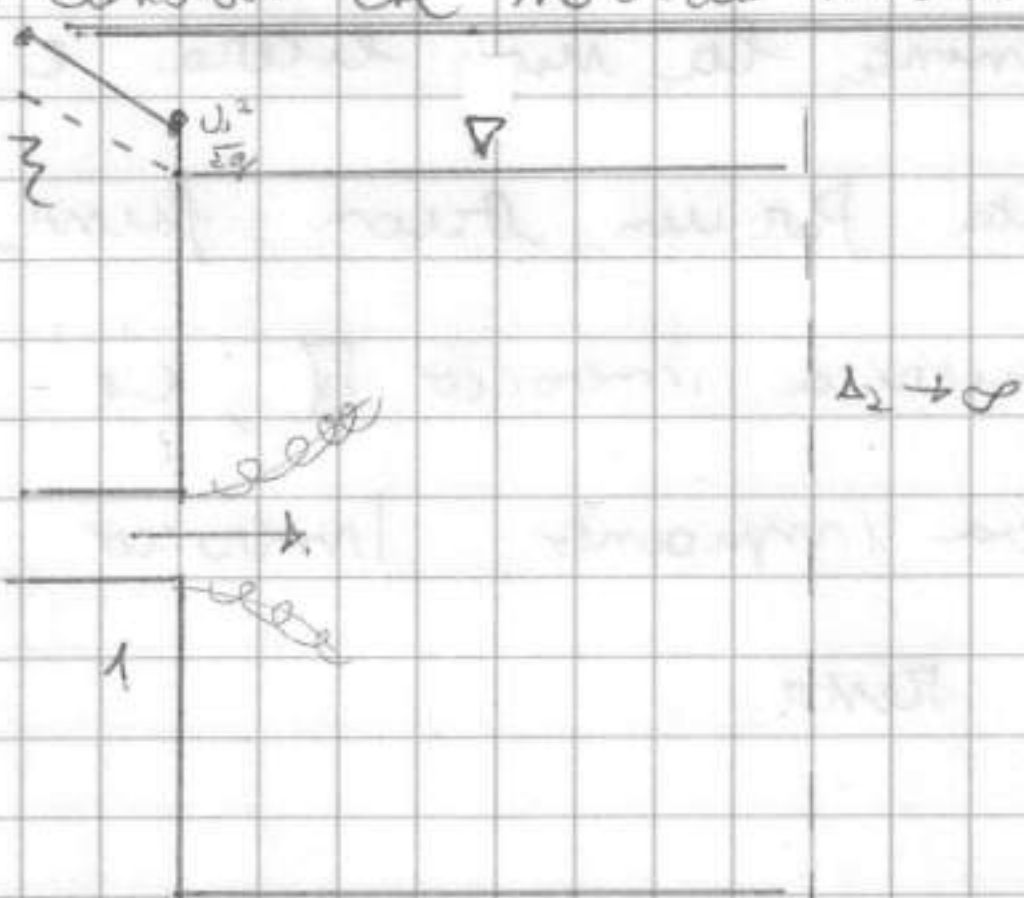
$$\bar{P}_{rec} = \bar{P}_i$$



Generalizzazioni.

$$\sum_1 - \sum_2 = \frac{U_2^2}{2g} \left(1 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right); \quad H_1 - H_2 = \sum \frac{U_2^2}{2g} \quad \text{dove} \quad \sum = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} - 1\right)^2$$

1) Considero che Morcia in un serbatoio (di grande ampiezza, $\Delta_2 = \infty$)



Applicando le eq. $[U = Q/\Delta]$,

$$U \rightarrow 0, \quad \text{quindi} \quad \sum_1 = \sum_2$$

Per i vortici DISSIPANO tutta l'energia cinetica

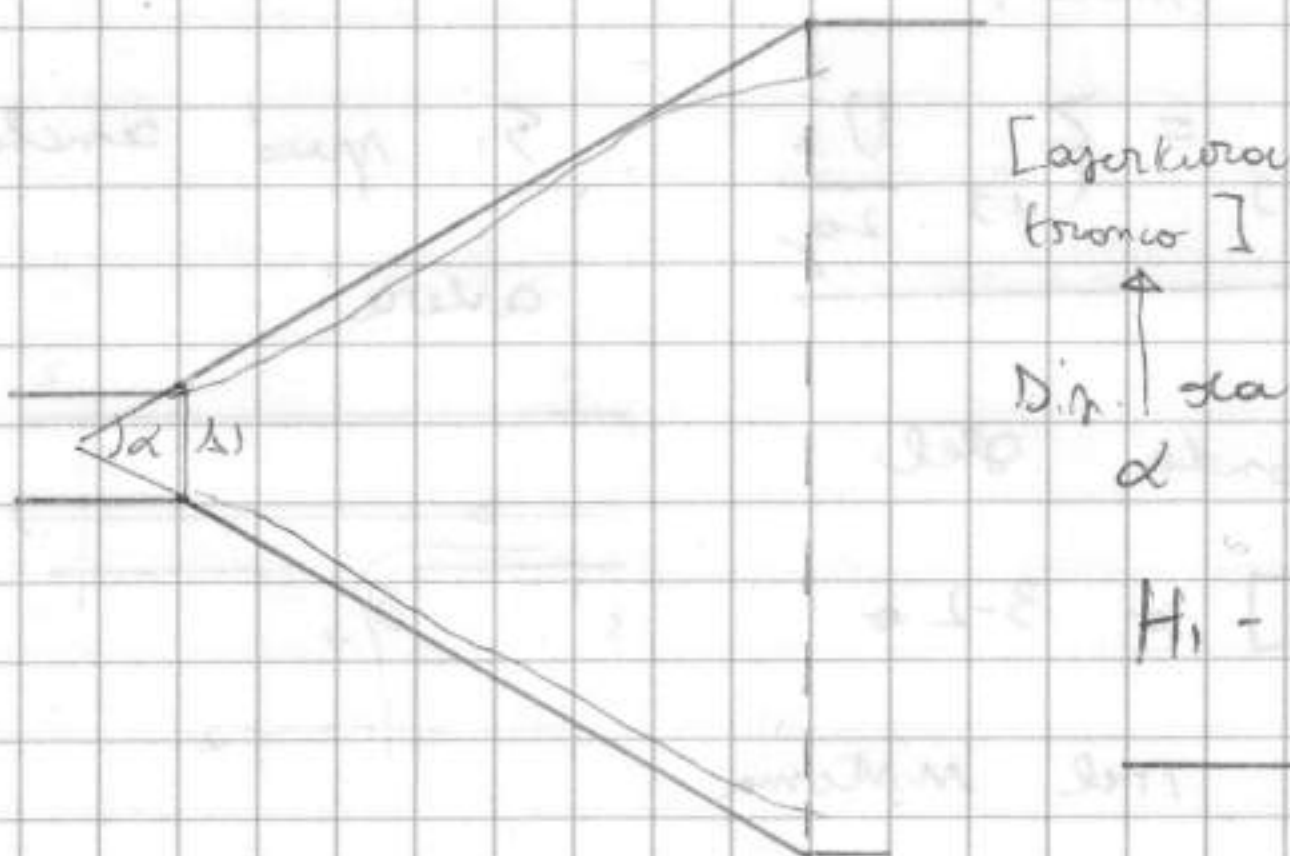
2) Raccordo tronco - conico non brusco (graduale allargamento sezione,

corta di + ma ricircoli presenti

localizzate in mano in piccoli impilanti). Gradiente dissipativi

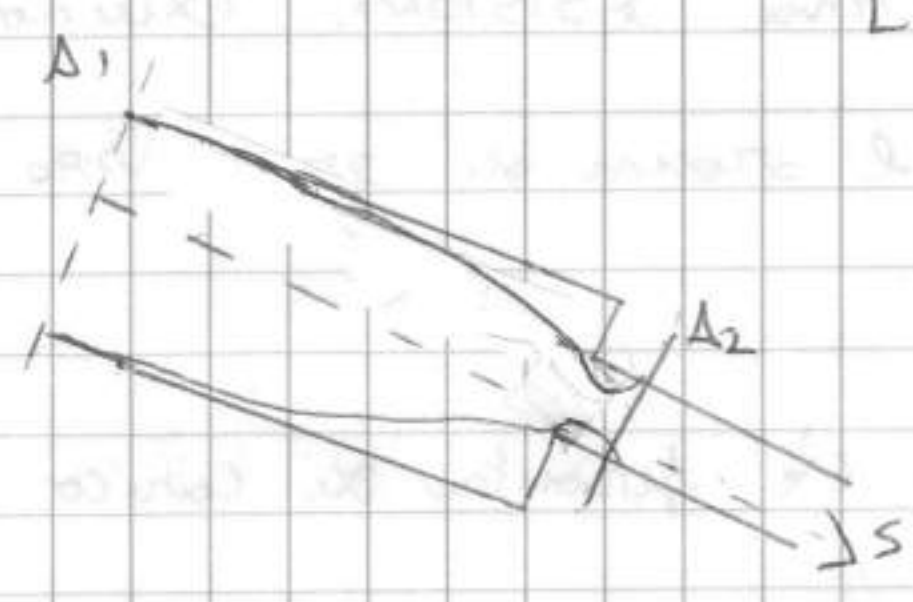
che si distribuisce in raccordo

$$H_1 - H_2 = \sum \frac{U_2^2}{2g} \quad \text{dove} \quad \sum = \frac{k \alpha_1}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} - 1\right)^2$$



Valori tabellati, per $\alpha = 10^\circ \rightarrow k_a = 0,2$; Per $\alpha = 20^\circ$, $k_a = 0,40$.

3) Brusco restringimento su sezione



[Come nelle a battente] Si inserisce un circolo nel restringimento della vena.

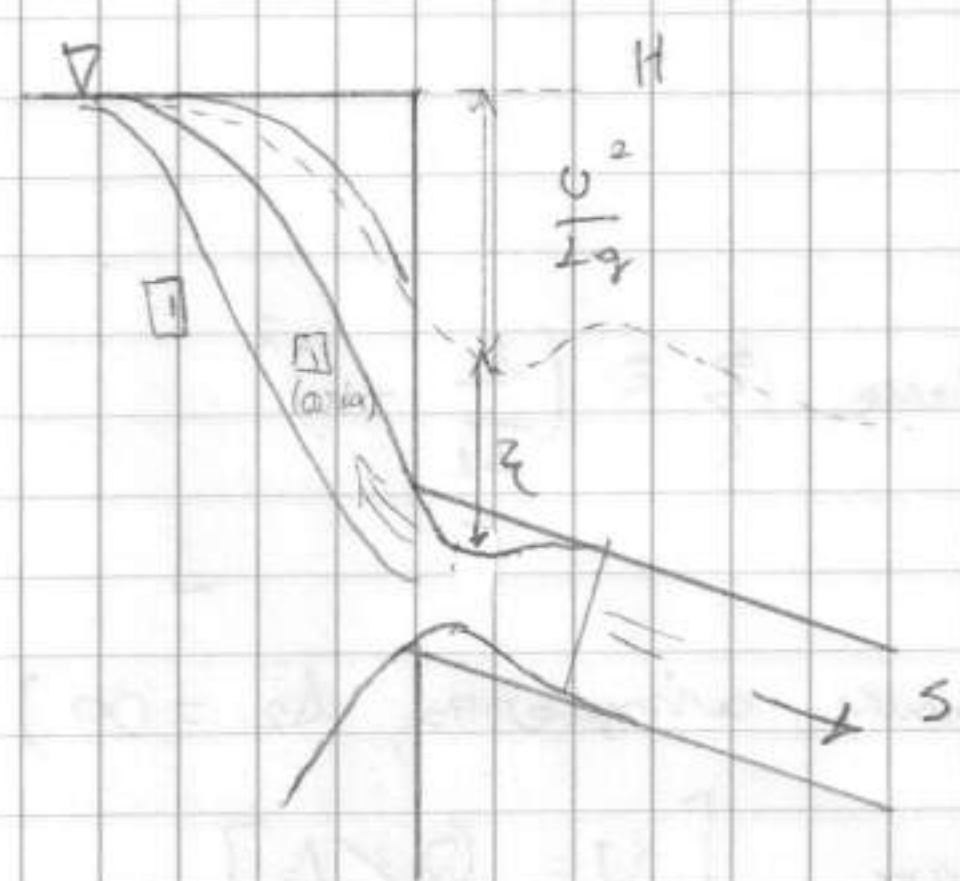
Quindi $H_1 - H_2 = \sum \frac{U_2^2}{2g}$ dove \sum dipende

dal rapporto di riduzione [Tabulate];

$\frac{D_2}{D_1} = 0,1$, $\sum = 3,48$; $\frac{D_2}{D_1} = 0,9$, $\sum = 0,06$. Perche qui nono PARTE di E. cin.

quindi parte di piccola entita.

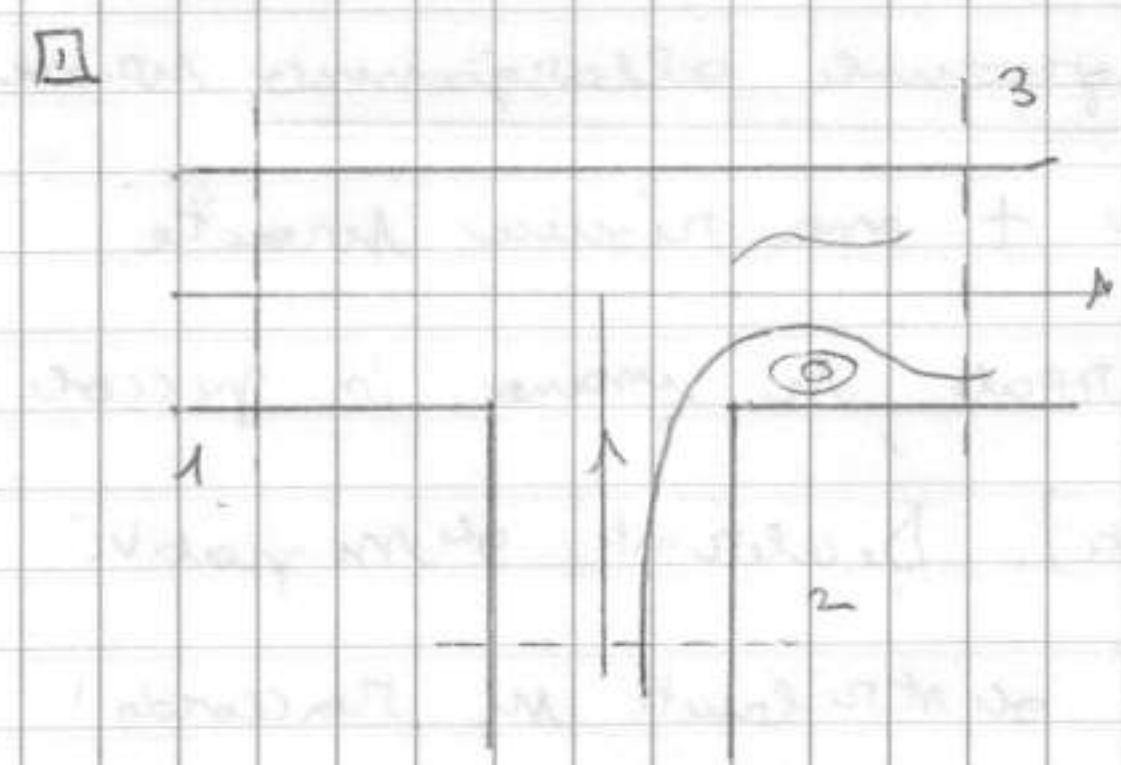
4) Sbraccio condotta da grande sbraccio



C'e' accelerazione della corrente che ha U_{sx} nella parte contratta, c'e' U_{sx} alterna cinetica. In sc. c'e' max H. cin e min \sum . Livello di sup. libera si altera. Imboccare una condotta fa diminuire localmente la sup. libera e va controllata. Per un buon funa.

abbastanza deve essere sup. a quota geometrica imbocco II; c'e' zona che trasforma acqua e aria che perfora impianto. Imbocco deve essere a battente, controllare bruschi resti.

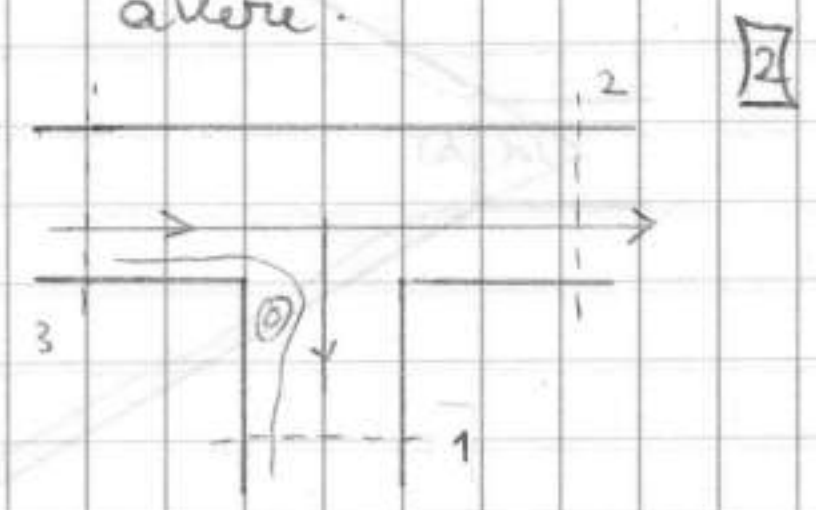
5) Racordi a T



Condotta interseca da altro Cond. che corrente portata, si prova unif. del moto.

$\Delta H_{12} = \sum_{12} \frac{U_3^2}{2g}$

Si può anche avere:



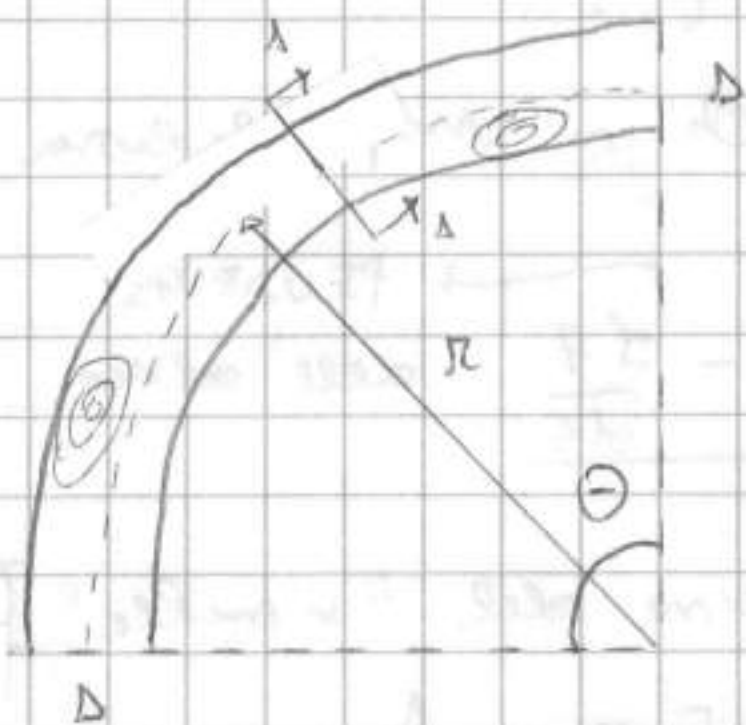
percorso inverso perche da 1-3-2-3 I o 3-2-3

79 3-1 II. Perche a a E. cin U_{sx} nel sistema

(quella dove c'e' U_{sx} portata)

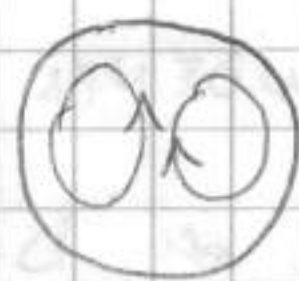
$\sum \xi$ tabulati in $f(\text{poroso})$ e Q_0/Q_2 .

6) Curvatura locale del condotto rilevante



Si osserva forte di riuiccolo a imbocco e sbocco.

Conr. nat. Δh la ΔP tra lato est. e interno. Osservo moti di riuiccolo opposti. \rightarrow



$\Delta H = \sum \frac{U^2}{2g}$ (anche qui a alt. u.m.), ma ξ conr. questi angoli dinamici.

$$\xi = \xi_{10^6} \alpha_s$$

$\rightarrow (0)$

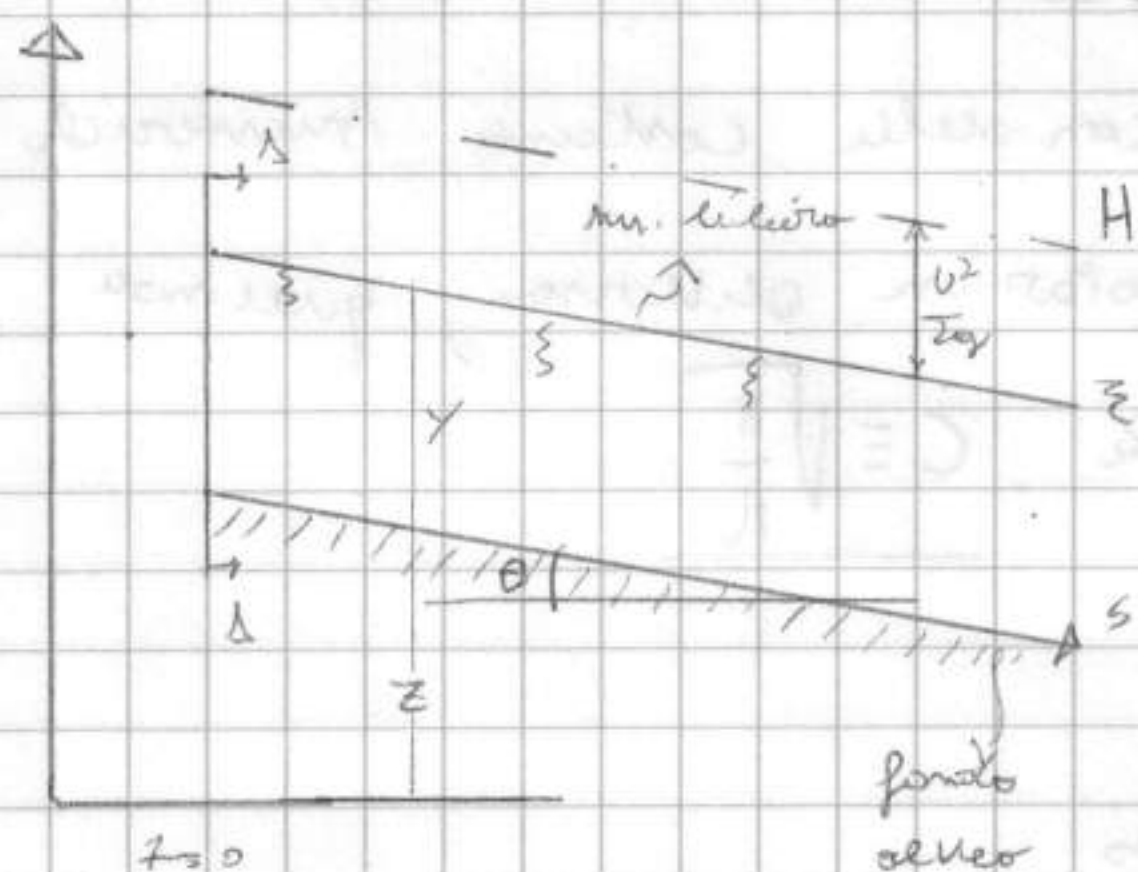
\rightarrow Coeff. che α da π/D e da $Re \rightarrow$ tabulati $\times Re = \frac{UD}{\nu} = 10^6$

ξ α anche da α_s che dipende anch'esso da π/D e da Re . Come mai?

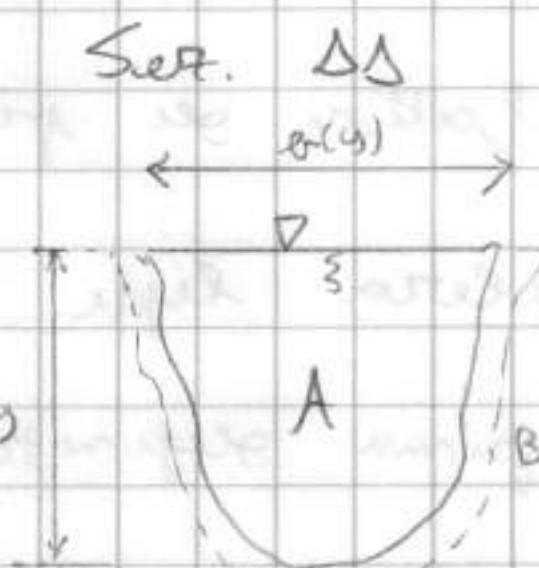
Entrata alle di riuiccolo α da ∇ a. centr. (U^2/R) , tanto $\epsilon >$ la U del flusso ($> Re$), tanto $\epsilon > \Delta P$ (e quindi il riuiccolo).

CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

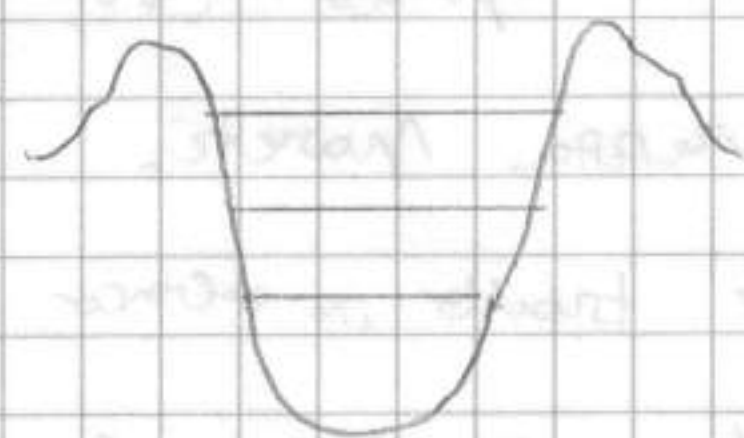
20/1/06



TIRANTE IDRICO
(o alt. d'acqua)



Moto uniforme anche se alveo non ha S rettilineo (curve molto ampie). y caratteristica sezione corrente. In quelle in pressione una dim. caratt. ϵ il diametro. Qui non ϵ unicamente definita. Conr. generica formula. Corrente puo' defluire con \leftrightarrow area bagnata.



Le ϵ il grado di elevat. in qui.

y ϵ verticale e non \perp a S perche' variazioni sono su pochi mm, \ominus alveo ϵ molto

piccola, di qualche unità $\times 1000$, sono quasi orizzontali \Rightarrow confondere
 verticale con \perp non crea problemi. Linea superficie libera $\equiv \{ [c' \text{ Patm}]$
 la linea dei carichi nel m.u. è retta $\parallel a \}$.
 In m.u. $-\frac{dH}{ds} = -\frac{dz}{ds}$ [ma in pendenza che in sup. libera] $\equiv J$,
pendenza piezometrica In c.a. sup. libera $J = -\frac{dz}{ds}$ ^{pendenza} dell'alveo $= \boxed{1' f}$

PENDENZA dell'ASSE DI FONDO [mm \odot , dell'origine del "x mille"]
 Legge di D-W qui si può formulare con: $[R = \frac{A}{B}]$ ^{M'include zona a contatto con suda}
 \downarrow
 $J = 1' f = \frac{1}{2g} \frac{U^2}{QR}$; qui la formulazione "antica" è di
 questo tipo: [FORMULAZIONE EMPIRICA]

$$U = \boxed{X \sqrt{R} 1' f}$$
 \rightarrow ^{LEGGE DI CHÉZY [1721]} \rightarrow ^{Meno usato di il in legge D-W}
 \downarrow ^{fattore det. x via empirica}
 Le due leggi non sono molto diverse. Da D-W ricaviamo U:

$$U = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \sqrt{g} \sqrt{R} 1' f$$
 ; sarebbe stessa formula se $X = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \sqrt{g}$
 (cambia solo il fattore di proporzionalità con delle costanti numeriche)
 Per correnti a sup. libera legge D-W ha notazione diversa, quindi
 al posto di X prima definita, si introduce $C \equiv \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$
 \downarrow
 FORMULAZIONE DI CHÉZY:

$$X = \frac{87}{1 + \frac{y_B}{R}} \quad ; \text{BAZIN} \quad ; \quad X = \frac{100}{1 + \frac{m^k}{\sqrt{R}}} \quad ; \text{KUTTER}$$

$$X = k_s R^{1/6} \quad ; \text{GAUCKLER} \quad ; \quad X = \frac{1}{n} R^{2/3} \quad ; \text{MANNING}$$

 Strutture simili che ricordano struttura f. antiche. I fattori (y_0 ,
 m^k , k_s , $\frac{1}{n}$) quantificati in base a natura scabrezza pareti.
 X dipende da R. Queste formule X da R! [c'è tratto in alveo
 (46) dove v transitoria] Formule pratiche rappresentano m.u. in c.a.

sup. elevata solo x Re elevati. Nel passato si facevano esperimenti
 su alvei con elevata irregolarità. ^{→ molto + rilevante che nelle condotte in pressione} Quindi qui - nella gran parte
 gli con Sismo in condizioni turbolente. ^{→ a volte si hanno alvei con depressione statica} Mentre nelle c.a. a pressione
 non conviene usare le f. antiche, qui è + ragionevole usare.

Con formula, $U = k_s Q^{1/6} \sqrt{R_{ef}}$. Se ho alveo in terra battuta
 ho un valore k_s ^{pross. 120} e calcolo portata $[Q = U \Delta]$. Con stessa geometria,

voglio alveo con vegetazione (+ E). Riducendo il calcolo con nuovo
 k_s , questo varia minore. Ci sono + formule. Per evitare confusioni,

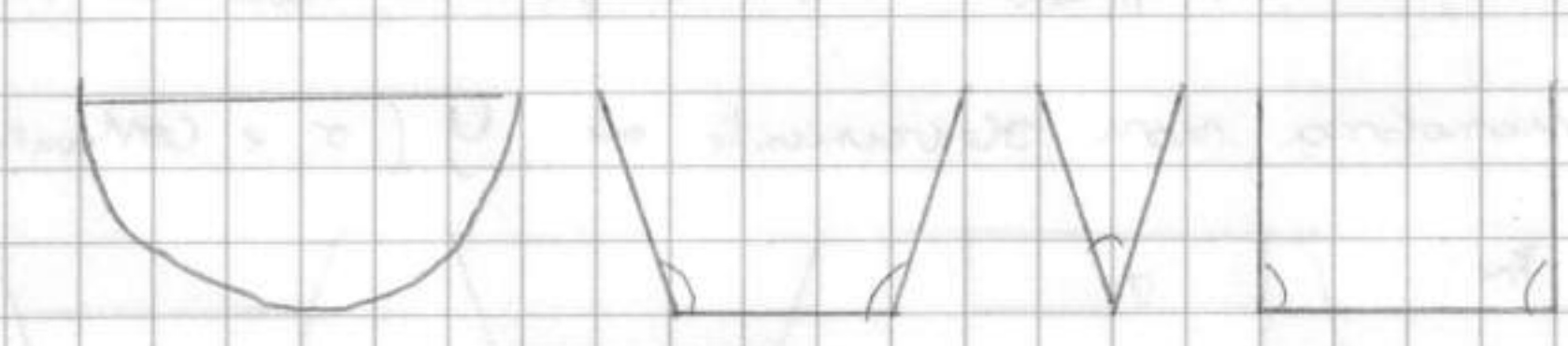
Manning ha posto $\frac{1}{n} \times$ alveo ^{→ capire meglio} > portata a > irregolarità.

FORMULAZIONE DI D.W.

Simile a c.i.m. p. solo che eq. Col - Wh. considera $C \equiv \sqrt{\frac{8}{f}}$

$$C = -5,75 \log \left(\frac{C}{Re_f} + \frac{E}{13,3 R_f} \right) \quad \text{dove } Re = \frac{QU}{\nu} \text{ e } f: \text{FATTORE DI FORMA}$$

f X in c.a. perr. [formule antiche con V non trascurabili rotte/movimenti
 loro resistenza] f è fattore che dà la forma alveo. Alveo a
 sup. elevata non è mai simmetrico rispetto ad asse, non c'è sim. assiale



Dimensioni di simmetria rispetto a moto, si hanno che moti "secondari" che
 si sovrappongono a moto di trasporto → traiettorie elicoidali che
 aumentano nelle curvature. In zone irregolari si hanno forti deformazioni
 e si hanno correnti 2° non trascurabili. f tiene conto di questi effetti
 di deformazione. [varia intorno all'unità]

Problema di verifica [voglio sapere la portata prima in stato
 normale]. Nel progetto ho bisogno di altri dati. Negli alvei
 non c'è unica risposta. L'altera se liquido può essere diverso,
 posso allora < c. di m.u. → SCALA DEI DEFLOSSI.

Si deve esprimere la relazione $Q = f(Y)$ in m. uniforme. (77)

Prenotiamo f. di Ch. (e un gabbione)

$$Q = UA = K A \sqrt{\Delta p} = h_s \Delta^{1/6} A \Delta^{1/2} \sqrt{f} = h_s \sqrt{f} A^{5/3} B^{-2/3} \quad [Q = A/B]$$

Dato alveo definito ho $Q = f(\Delta, B)$ dove $\Delta, B = f(Y)$.

Potro anche scrivere: (formula + compatta)

$$Q = K A^m(Y) \quad \text{perché } K \equiv h_s \sqrt{f} \quad \text{e:}$$

$$m) \quad Q = K \Delta^m \quad \text{Derivando risp. ad } \Delta, \quad \frac{dQ}{d\Delta} = m K \Delta^{m-1} = m \frac{K \Delta^m}{\Delta} =$$

$$m \frac{Q}{\Delta}, \quad \text{quindi } m = \frac{dQ/d\Delta}{Q/\Delta};$$

$$Q = \sqrt{f} h_s \Delta^{5/3} B^{-2/3}, \quad \text{ora anche qui } \frac{dQ}{d\Delta} = \sqrt{f} h_s \left(\frac{5}{3} \Delta^{2/3} B^{-2/3} - \right.$$

$$\left. \frac{2}{3} \Delta^{5/3} B^{-5/3} \frac{dB}{d\Delta} \right). \quad \text{Collociamo } \frac{Q}{\Delta} = \sqrt{f} h_s \Delta^{2/3} B^{-2/3} \quad \text{e facciamo}$$

$$\text{il rapporto col 1' simultato: } \frac{dQ/d\Delta}{Q/\Delta} = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \frac{A}{B} \frac{dB}{d\Delta} \right) \equiv m$$

[con queste posizioni posso esprimere Q in forma monomia]

↓

Ci sono <> tipi di simultati a seconda tipo alveo.

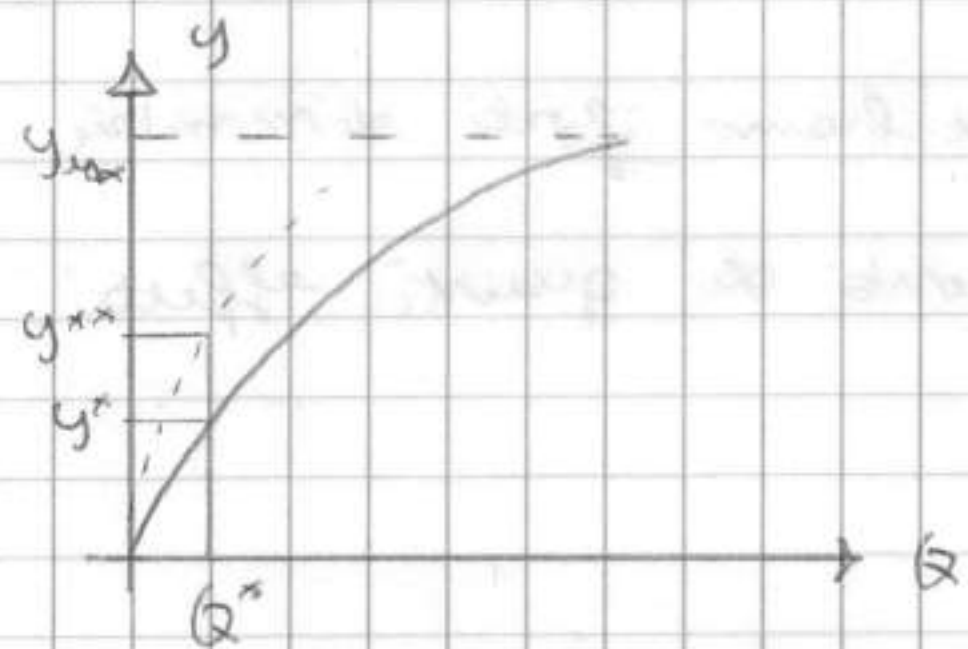
- ALVEI DI FORMA APERTA: [e' Forus, c. a. m. e. b. sono sempre a contatto con Patm]

alveo x; quale $Q(Y)$ e' monotona non decrescente di Y (o e' costante o aumenta se Y aumenta). Es:

Potro anche coprire, basta che ci sia Patm.

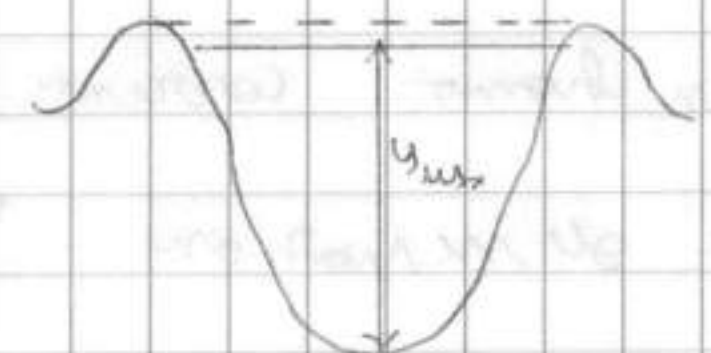


Ampliamenti:



Q cresce + che linearmente con l'incremento dell'area. Non → ad asintoto. C'è cmq.

Y_{max} , altrimenti c'è erosione. E' un po' minore dell'H geometrico



massimo per evitare FRANCO DISCREZZI contro le erosioni.

Nel progetto si prevede l'innalzamento dell'alveo, quindi si fa calcolo $x \in > .3 \pm \epsilon$, la V diminuisce e quindi la stessa Q

⑦8 ha bisogno di $\Delta(Y)$ maggiore a val in Y^{**} . Devo fare manutenzione periodica.

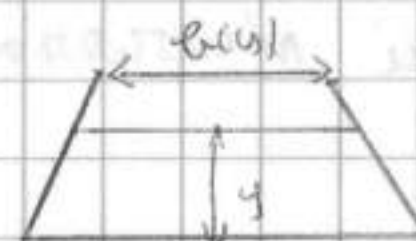
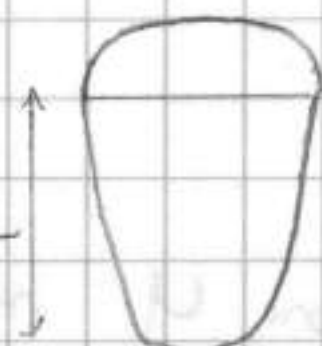
Verificare la portata $Q = \sqrt{g} h_s \frac{A^{5/3}}{B^{2/3}} = K A^{5/3} B^{-2/3}$ [alveo forma aperta]

ALVEI DI FORMA CHIUSA

Alveo tale quanto la larghezza in sup. libera può diminuire all'aumentare di y . Es. ret. circolare

o policentrica

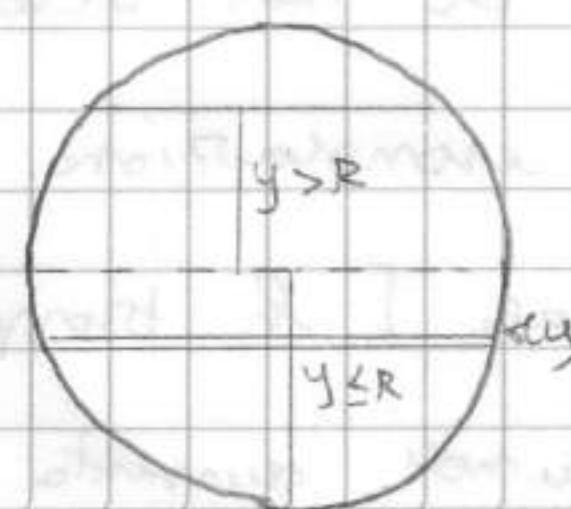
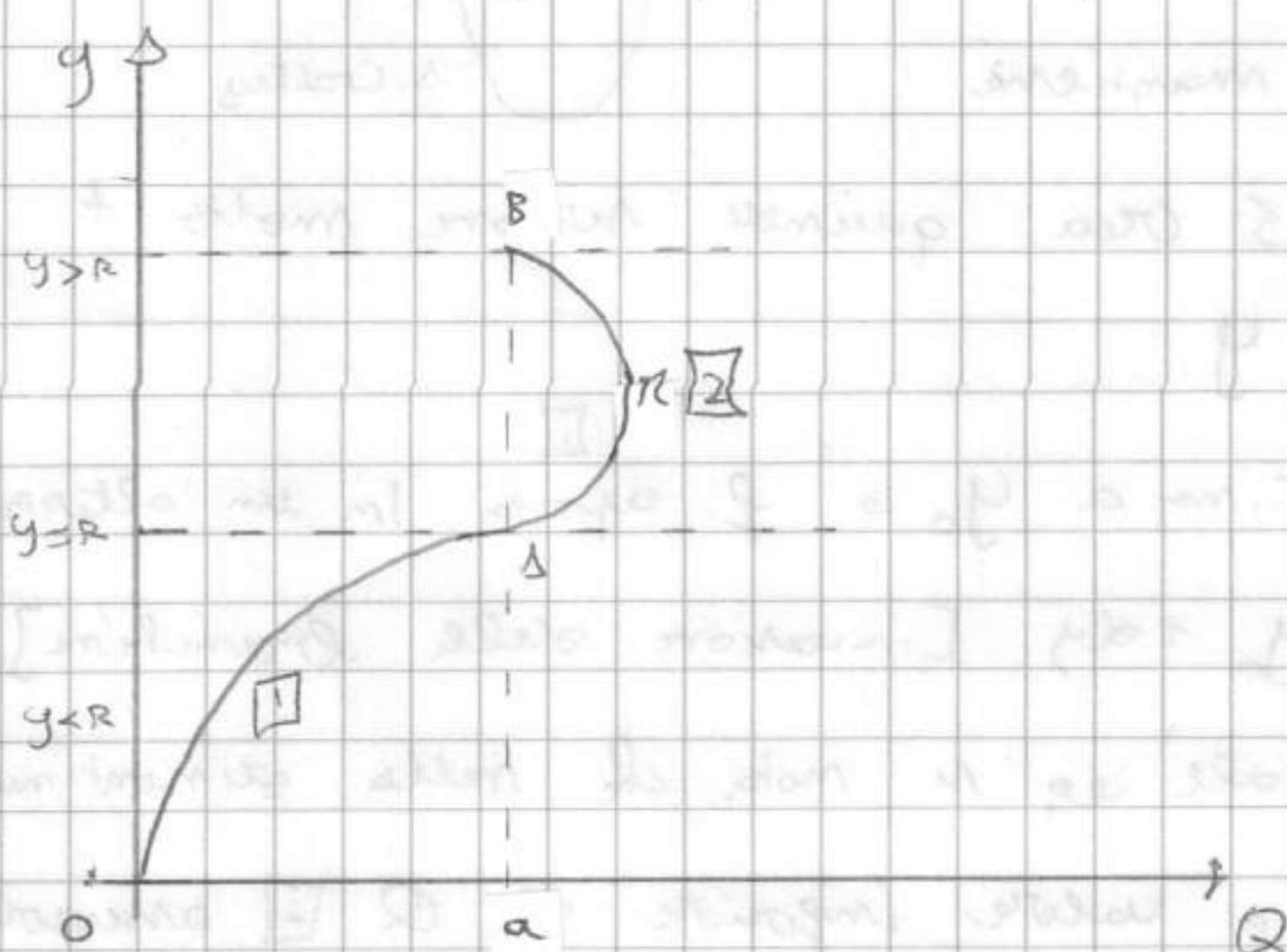
f. aperta



fino a $y = R$ e' alveo in forma aperta, poi no. E' chiuso e' in pressione, se $y > R$

Tipico delle FONTANE

Conr. ret. circolare (font. piccole)



Per $y \leq R$ c'è alveo a forma aperta I.

Per $y > R$, è anzitutto e' variante + lentamente all'infinito, raggiunge Q_{max} e torna indietro fino a $y = D$ escluso [Caso limite, in Press] II

Da 0 ad A c'è legame biunivoco $Q-y$; da A-M-B n' possono avere 2 < > R x la stessa portata → problemi tecnici / applicativi. Perché?



Esaminiamo Q . Conr. tratto di incrementi in $y < R$, per $\uparrow dy$ c'è incremento Δ e B , nella parte sup. invece diminuisce A . Abbiamo en. disponibile, c'è \bar{U} che d'ora resiste al moto. In forma aperta, $\uparrow y$, $\uparrow B$, \uparrow resistenza $\Rightarrow \bar{U}$ diminuisce, ma $\uparrow A$, complessivamente Q cresce. Nel tratto superiore $\uparrow B$, \uparrow portata, $\downarrow U$ e incrementi A non BILANCIA le perdite e $Q \downarrow$.

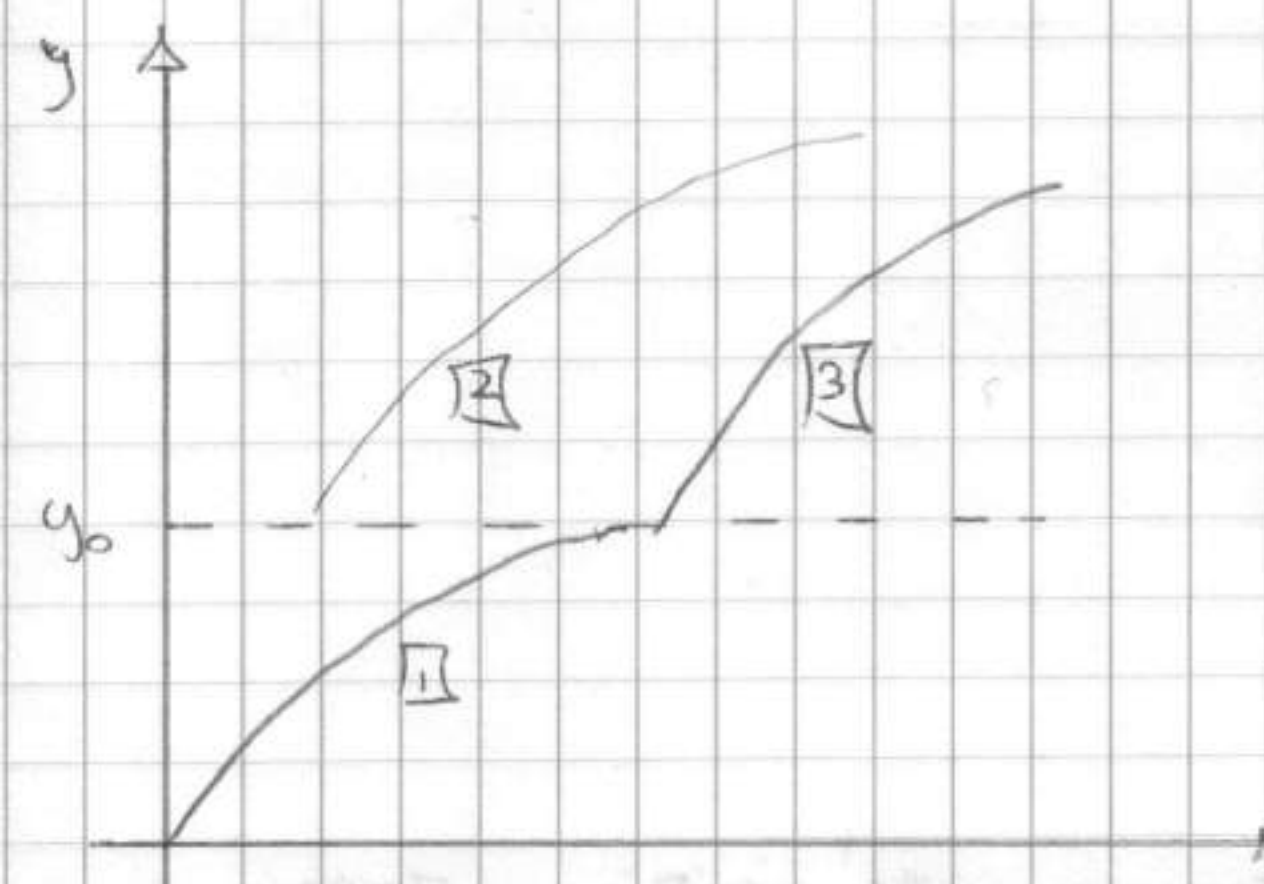
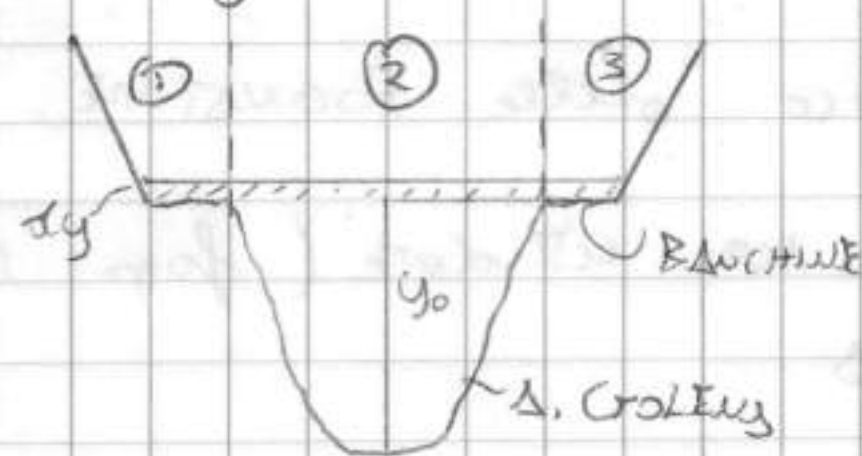
$a \in T_M$; se però localmente accade l'opposto (ex. accumulo detriti), acqua
 si colloca ad altezza superiore. Poi portata aumenta e nuovo M è
 quindi molto più $Q < [M_0 \text{ oltre } M] \Rightarrow$ si riempie nottione, si va in
 temone e fogna si rompe. Evidente è pensare che $Q_{\text{multierie}} \equiv Q(M)$.
 $Q_{\text{si m'interessa}} \equiv Q_A$ [cioè il tratto di comp. livellato]

ALTRI DI FORME COMPOSTE

Se v è tale x all'aumentare di y , B cresce con y ma non è
monotona (ha discontinuità) Ex: fiume: ① ② ③

Le piene che non determinano allargamen-
to alveoli, c'è eronolazione. Non si mantiene

Config. naturale [h troppo alta]. Si crea quindi sezione molto +
larga e quindi diventa sei meno 9.



Fino a y_0 e' f. aperta. In un'altera
 $y_0 + dy$ [invasione delle branchie]

Dall'eq si nota che nella discontinuità
ha valore inferiore gli Q [2], assunto
fisico. L'eq. è stata ricavata supponendo

Q che correnti monocariche sono trascurabili
smp. del moto gli trasporti. Qui e' come un bucket allargamento
e correnti 2'arie non sono trascurabili. (Per almeno min). Soluzione

x via empirica (sempre con schema monodimensionale): per $y > y_0$ suddiviso allora in 3 porzioni ideali e quindi corrente compressa
= somma corr. ①, ②, ③ in // . Calcolo la portata con:

$Q = \sqrt{if} \sum_{i=1}^3 k_{sm} \frac{\Delta_m^{5/3}}{B_m^{2/3}} \rightarrow \text{area relative a porzione. } B_m \text{ considera solo}$
 $\rightarrow \text{no acqua/acqua}$
 $\rightarrow \text{parte di contatto acqua/parete solida}$
 $\Rightarrow \text{non si contano le divisioni (e}$

80) ovviamente acqua / aria). Si ottiene β , c'è discontinuità nella derivata

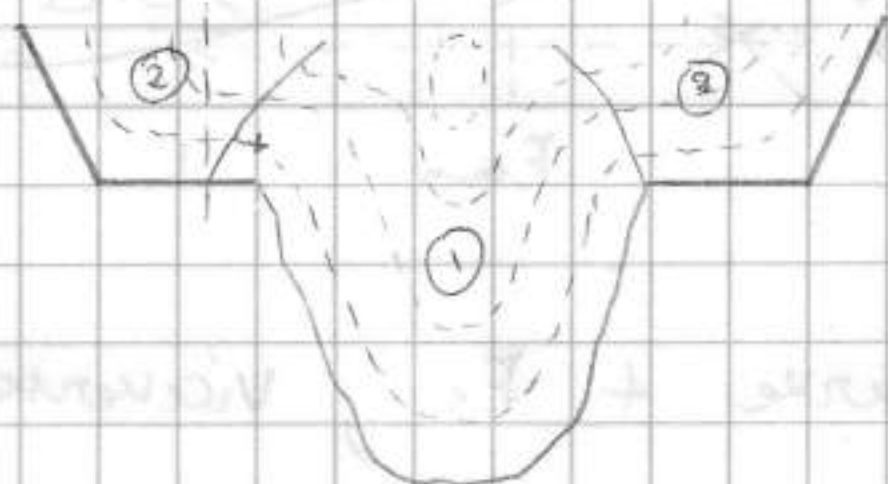
e poi torna a cercare [curva ottenuta interpolando i valori].
 Perché funziona? Nel calcolo su B (per $y > y_0$) si esclude il
 contatto acqua/acqua [avevamo escluso acqua/aria che non ci
 sono azioni tangenziali] → stessa corr. qui. Ma che ne lo dice?

Oltretutto Mucci si è minorata la $V \perp$ a sezione \times capite il campo
 di V e riportate le linee con la stessa V :
 [ISOTANIE]

Corr. le m_{xy} \perp a queste linee (linee
 di ∇). Se calcolo $[t_v = \mu \frac{du}{dn}]$ t_v imp.

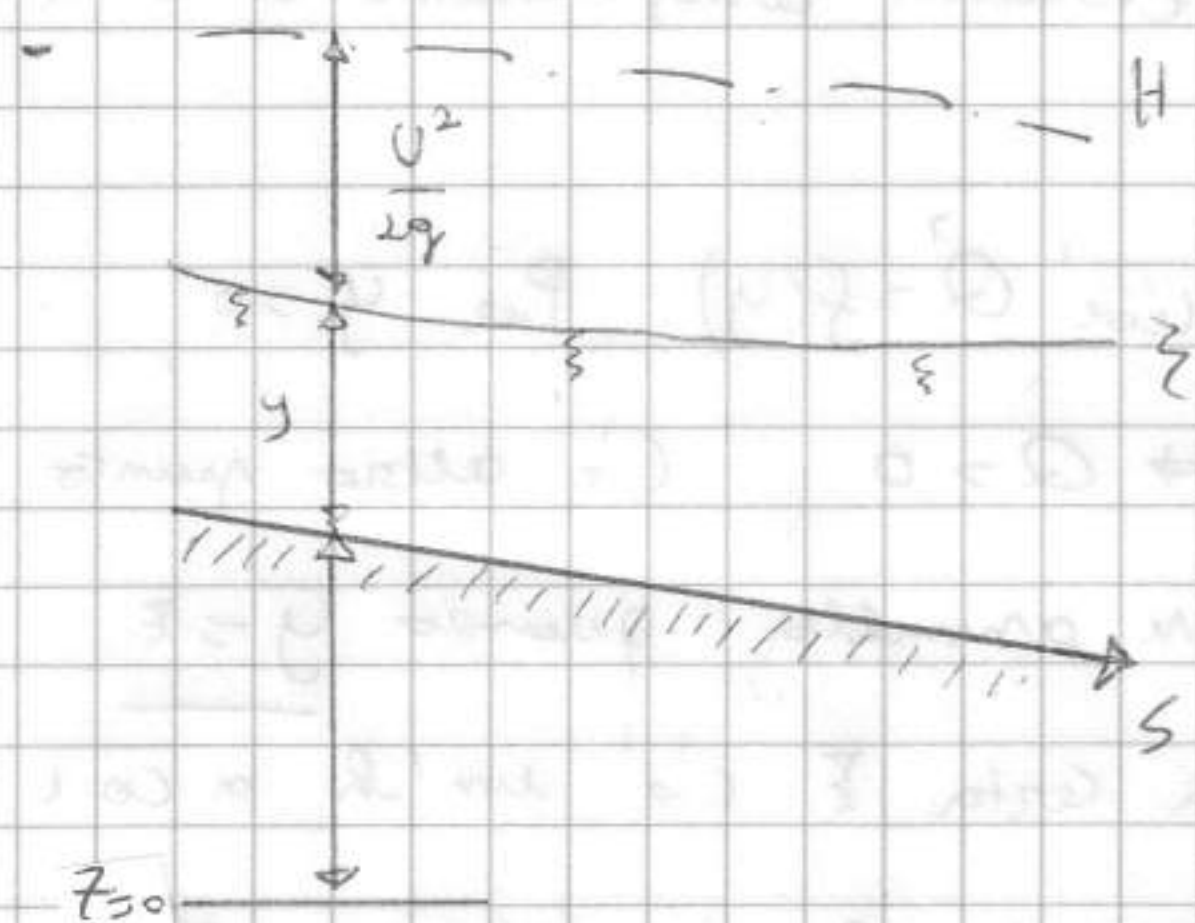
alle superfici, essendo linea di gradiente ∇t_v . Ma ∇ anche ∇t_v .

Sono però trascurabili. Però m_{xy} considerate erano $\{$, non \backslash ,
 inclinate di $45^\circ - 60^\circ$ → se corr. questa ipotizzazione a una
 soluzione ancora più precisa.



∇

CLASSIFICAZIONE CORRENTI A SUP. LIBERA LINEARI



H permanente, ma non uniforme e

cmq lineare \Rightarrow ho le

MOTO PERMANENTE LINEARE

(ξ = cost. nelle xy \perp).

Definisco un carico medio:

$$H \equiv Z + Y + \frac{U^2}{2g}$$

en. \times unita' su
 peso della corrente
 alt. generica xy \perp .

Introduco l'ENERGIA SPECIFICA: \rightarrow legata a y e a z cinetica

$$E \equiv H - Z = Y + \frac{U^2}{2g} = Y + \frac{Q^2}{2g A^2}$$

\rightarrow legata alle coratt.
 dinamiche del deflusso

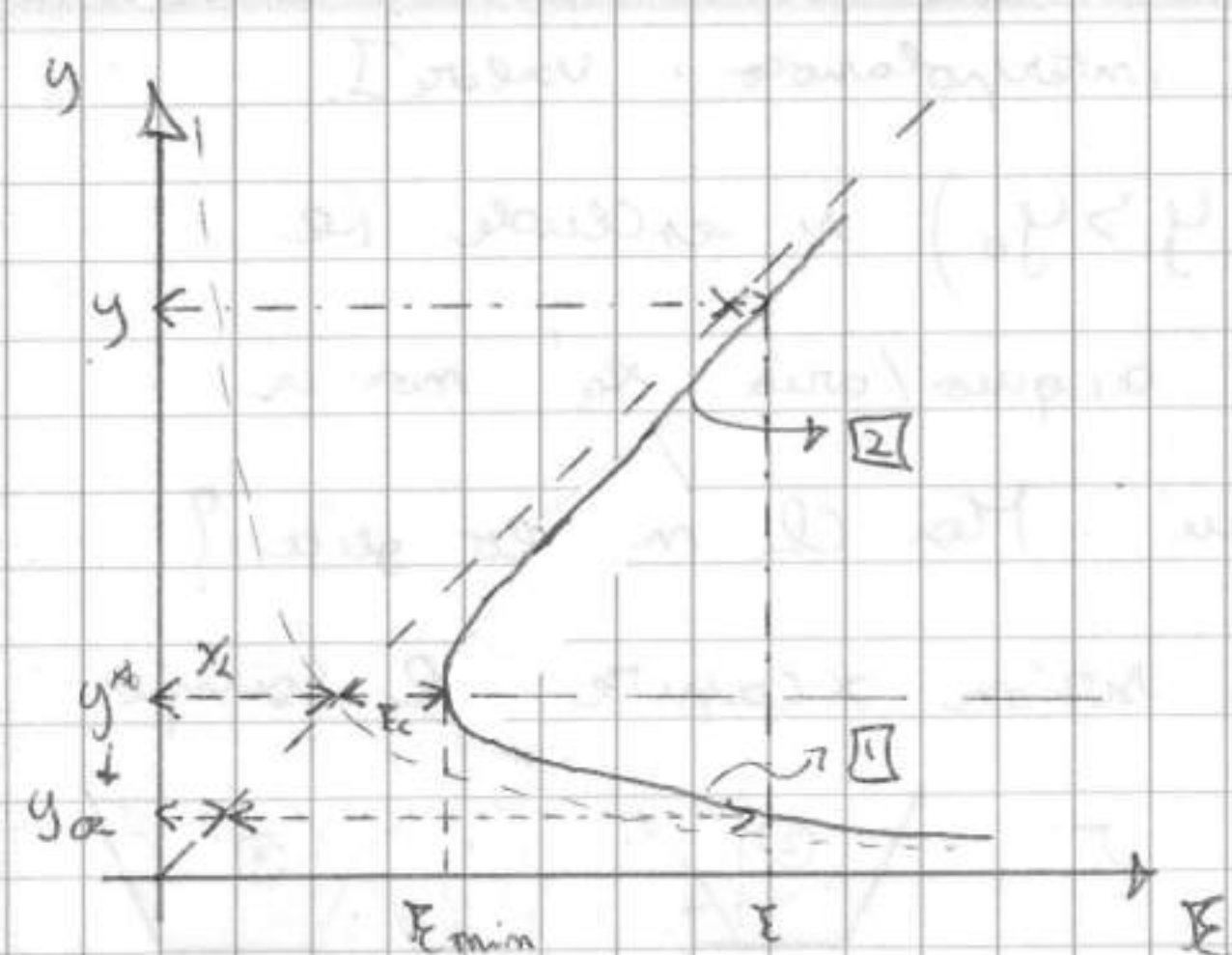
Come varia E in $f(y, Q)$.

Considero $Q = \text{cost}$ e quindi solo $E = f(y)$. $\rightarrow E(y) = Y + \frac{Q^2}{2g A^2(y)}$

\rightarrow

Andamento \rightarrow somma 2 contributi: y e la funzione del

1) geometrico; per le 2 contributi: se $y \rightarrow \infty$, $A^2(y) \rightarrow \infty$



quindi $L \rightarrow 0$, viceversa $L \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0$.

Portata può defluire con $< \rightarrow$ h o $E < \rightarrow$.

C'è y^* dove portata defluire con un minimo di energia. Stessa portata

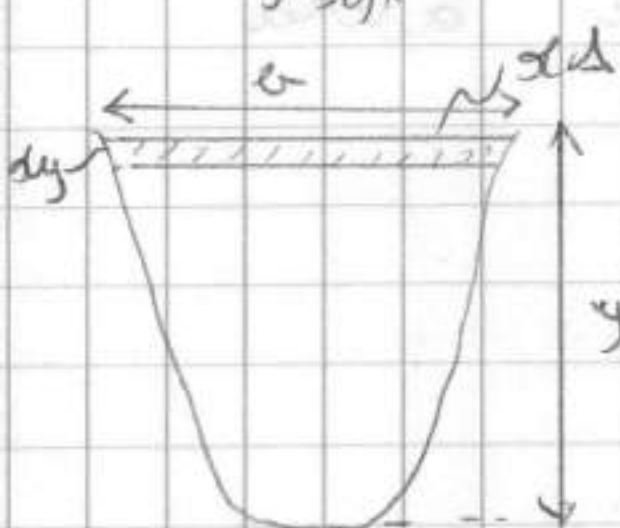
può scorrere con y differente.

E_{min} è stata da y^* e $\frac{Q^2}{2g}$, di livello. Negli altri casi si ha che per $y < y^*$ mi

serve $+ E_c$, viceversa per $y > y^*$. Si ha che II. Corrente VELOCI e

III. Corrente LENTE. Quanto vale y^* ? E_{min} è stato min. lo calcolo con

$$\left. \frac{dE}{dy} \right|_{y=y^*} = 0 \quad \text{Quindi} \quad 1 - \frac{Q^2}{2g} \frac{(-2)}{A^3} \frac{dA}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{g} - \frac{b}{A^3} = 0$$



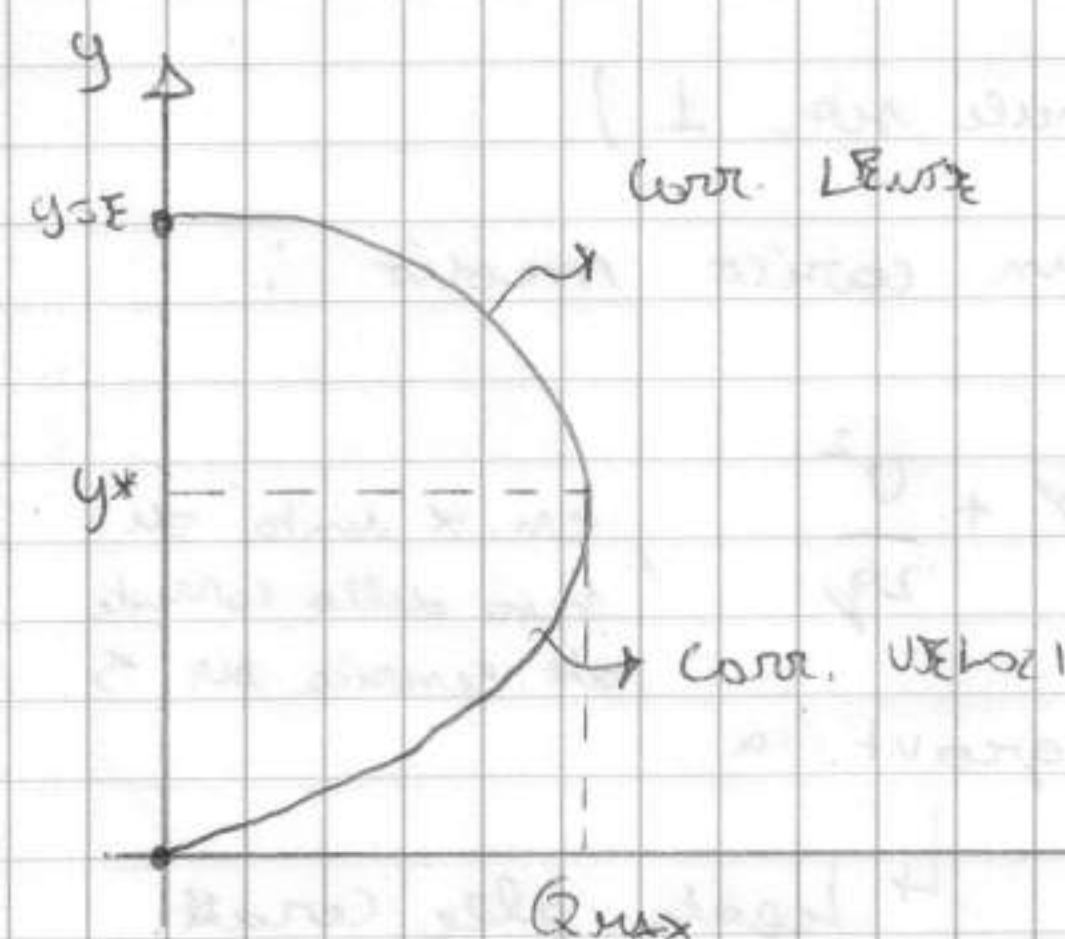
$$\Rightarrow \frac{dA}{dy} = b$$

$$[dA = b dy]$$

$$\boxed{\frac{A^3}{b} = \frac{Q^2}{g}}_{y=y^*} \rightarrow \text{Relazione di altezza critica}$$

Classificazione importante. Ho comportamenti evolutivi completamente diversi.

Corr. su $E = \text{cost}$. (not. su A) $Q = A \sqrt{2g(E-y)}$, cioè $Q = f(y)$. Per $y=0$,



$A=0 \Rightarrow Q=0$. C'è altro punto

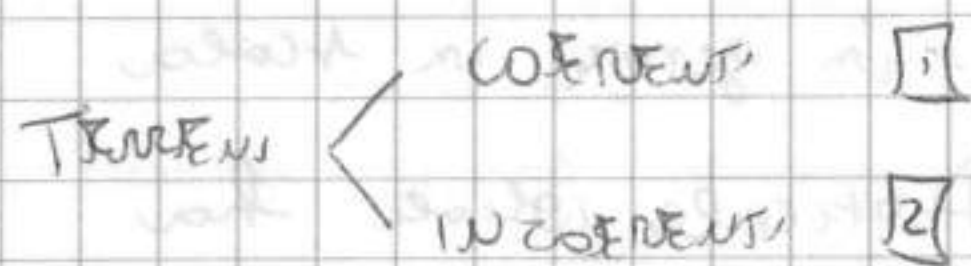
dove si annulla, quando $y=E$.

Per una certa E c'è un h a cui corrisponde il massimo di portata. Calcoliamo y^* :

$$\left. \frac{dQ}{dy} \right|_{y=y^*} = 0 \quad \text{quindi:}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{A(-2g)}{\sqrt{2g(E-y)}} + \sqrt{2g(E-y)} \frac{dA}{dy} = 0 \rightarrow -\frac{A g}{Q/A} + \frac{Q}{A} b = 0 \quad \text{quindi}$$

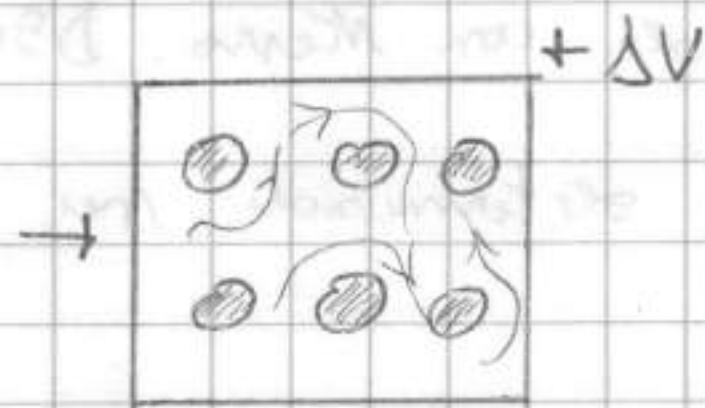
$$\boxed{\frac{A^3}{b} = \frac{Q^2}{g}}_{y=y^*} \Rightarrow \text{le } X_{out} \text{ coincidono}$$



[1] \rightarrow particelle terreno piccole, argille \rightarrow max. superficie grande

[2] \rightarrow " " " grandi \rightarrow Forze superficiali piccole

Sabbie e ghiaie, argille \rightarrow



\rightarrow all'interno può esserci matrice solida e
zona restante vuota, riempibile dall'acqua. Le
parti sono eterogenee (f. solida (terra), f. liquida o aeriforme)

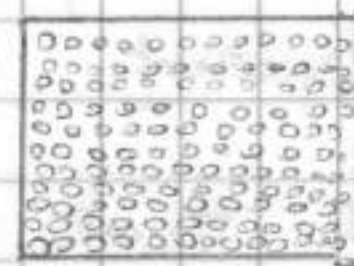
$\Delta V_m = V$ occupato dai vuoti, non sempre vuoti sono comunicanti
e quindi percorribili dal fluido. $\Delta V = \Delta V_s + \Delta V_m$

Si definisce $\phi_v = \frac{\Delta V_m}{\Delta V} < 1$ \rightarrow è grande, è facile muoversi
nel terreno \times il fluido. Nota

FAITTORE DI POROSITÀ (VOLUME) tortuosi

ϕ_v \propto al DIAMETRO CARATTERISTICO (dimensione delle particelle del
terreno). \rightarrow sono piccole, \rightarrow è la porosità:

- scala Forze delle particelle
- // posizione (\vec{x}) del campione.



Quindi $\phi_v = f(D_g, \rho, \vec{x})$

Un terreno normalmente non è monodisperso, al max. \pm uniforme.

Come associare D a Terreno? Analisi GRANULOMETRICHE. Si preleva campione
in peso di terreno e posizionato su setacci impilati a dimensione



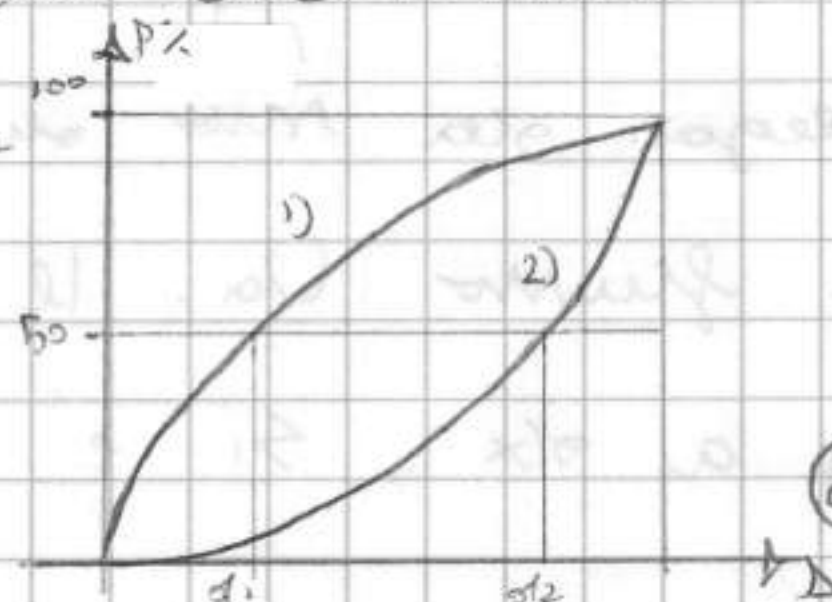
decrescente della apertura delle maglie.

Si pesa V mtacis la q di materiali e la n
rapporta al peso totale \Rightarrow collari del PASSANTE

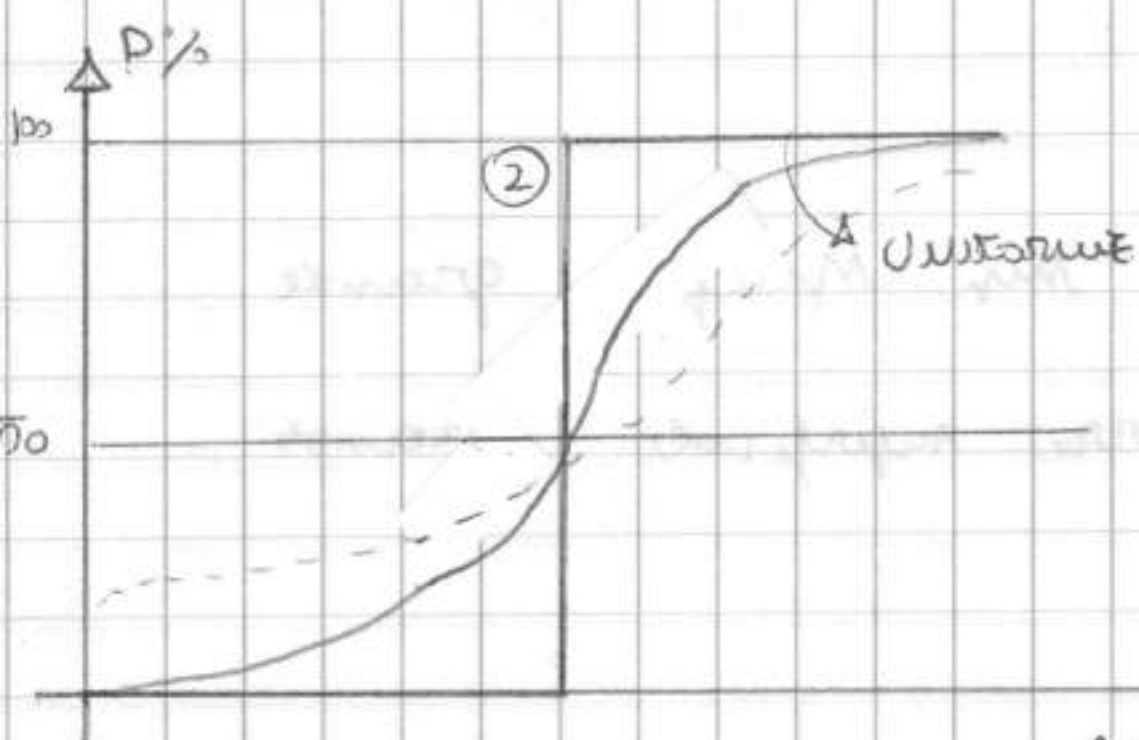
PERCENTUALE, normale e si ottiene

La CURVA GRANULOMETRICA

2 curve a monota della dim. caratteristica.



Tutto il materiale ha $D \leq D_{max}$ (100%). Si raggr. in genere in scala



curva a guscio (2), c'è un'isola D V

particella, in natura non \exists . Nat. scale

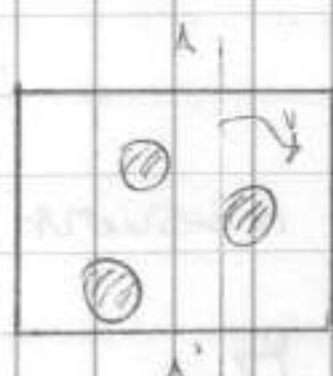
n'elimata ora urda. φ 2 anhi ora
50% mat. ha nimpelo noma elim.

$\log D$ uniforme. Ex: materiali con M_n D50

μ nono \Leftrightarrow in uniformita' hanno φ_v siccome. Parametri determinati nei

laboratori di geotecnica.

ΠΩΤΟ ΝΕΙ ΤΕΡΕΝΙ ΡΟΡΑΣΙ



Dovremmo teoricamente fare anche: puntuale del

campo su Velocità. Contr. DV / sia contenere le

diff. dimensioni del materiale in situ, ma

piccolo x le scale del fenomeno. $\Delta V \rightarrow \Delta S$; $\Delta U_m \rightarrow \Delta S_m$ [$\Delta S =$

non \perp a φ moduli; $\Delta S_m \rightarrow$ sup. altro, la quale avviene in flusso
 \rightarrow e non annulla puntuale A

Conn. Va apparente mediata su SS che ci sta la

Memorizza Q del vettore fluente $Q = \int_{\Delta S_m} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d(\Delta S_m) =$

$$= \int_{\Delta S} \vec{U}_a \cdot \vec{n} \, d(\Delta S) \quad \text{cio' e' a } Q = \vec{V}_m \Delta S_m = U_a \Delta S \quad \rightarrow \text{ho mostrato il flusso}$$

Derivative $Q_a = \bar{V}_m \frac{\Delta S_m}{\Delta a} = \bar{V}_m \left[\varphi_s \right] \rightarrow \text{for SURFACE}$

done $\varphi_s = f(\varphi_v)$

LEWIS DI DORCY

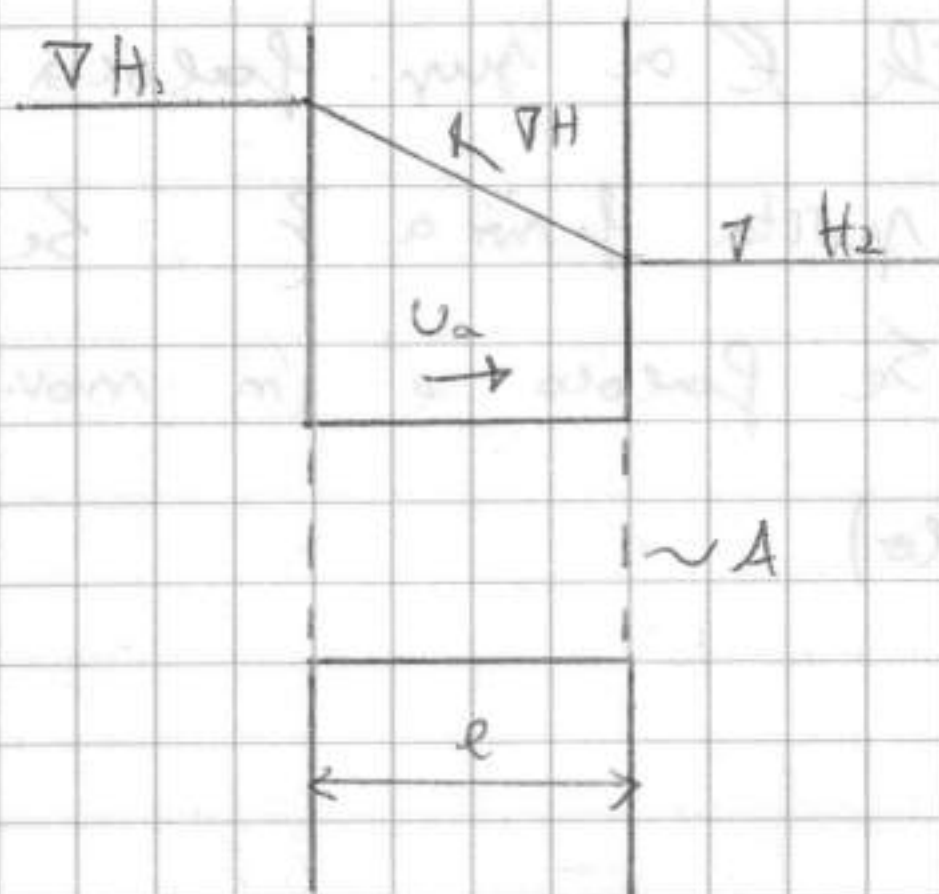
Ottenuta x via empirica. Due solventi a liv. differente con ΔH ,

Collegati alla Mta su materiale incoerente (malizia) → m' intorcia

un fiume Q_a . Il salto ha lunghezza l e area A . φ sia la

8/1) a sx si è osservato che la portata era proporzionale

molte all'area, alla diff. di carico,
int. prop. a lunghezza percorso.



$$Q = A \frac{\Delta H}{L} M \rightarrow \text{FATTORE DI PERMEABILITÀ} \quad [m/s]$$

Infatti $U_a = M J \rightarrow$ ha un
moto LAMINARE (o in. laminare). Moto
che avviene in canali piccoli, sufficiente

avere turbolenta. $M = \frac{m g}{V} \rightarrow$ COEFFICIENTE DI PERMEABILITÀ SPECIFICA

$[m] = L^2$. m d. delle caratt. solo del terreno M anche dal fluido.

Se poniamo cost. i valori in 2 esperimenti con solo $V \neq$, $C' \neq U_a$.

$m = f(\varphi_s)$. Più è permeabile, + è facilitato il flusso. Ex.

ghiaia + porosa ha resistenza minore.

In forma vettoriale:

$$\vec{U}_a = - \frac{m g}{V} \nabla h \rightarrow \text{d in senso opposto a } \nabla \text{ linea dei carichi}$$

$[h = z + \frac{p}{\gamma}]$ V lam, quindi trascurato il termine cinetico.

FALDE \rightarrow porzione di terreno permeabile dove può esserci l'acqua.

1) FREATICHE, 2) ARTESIANE

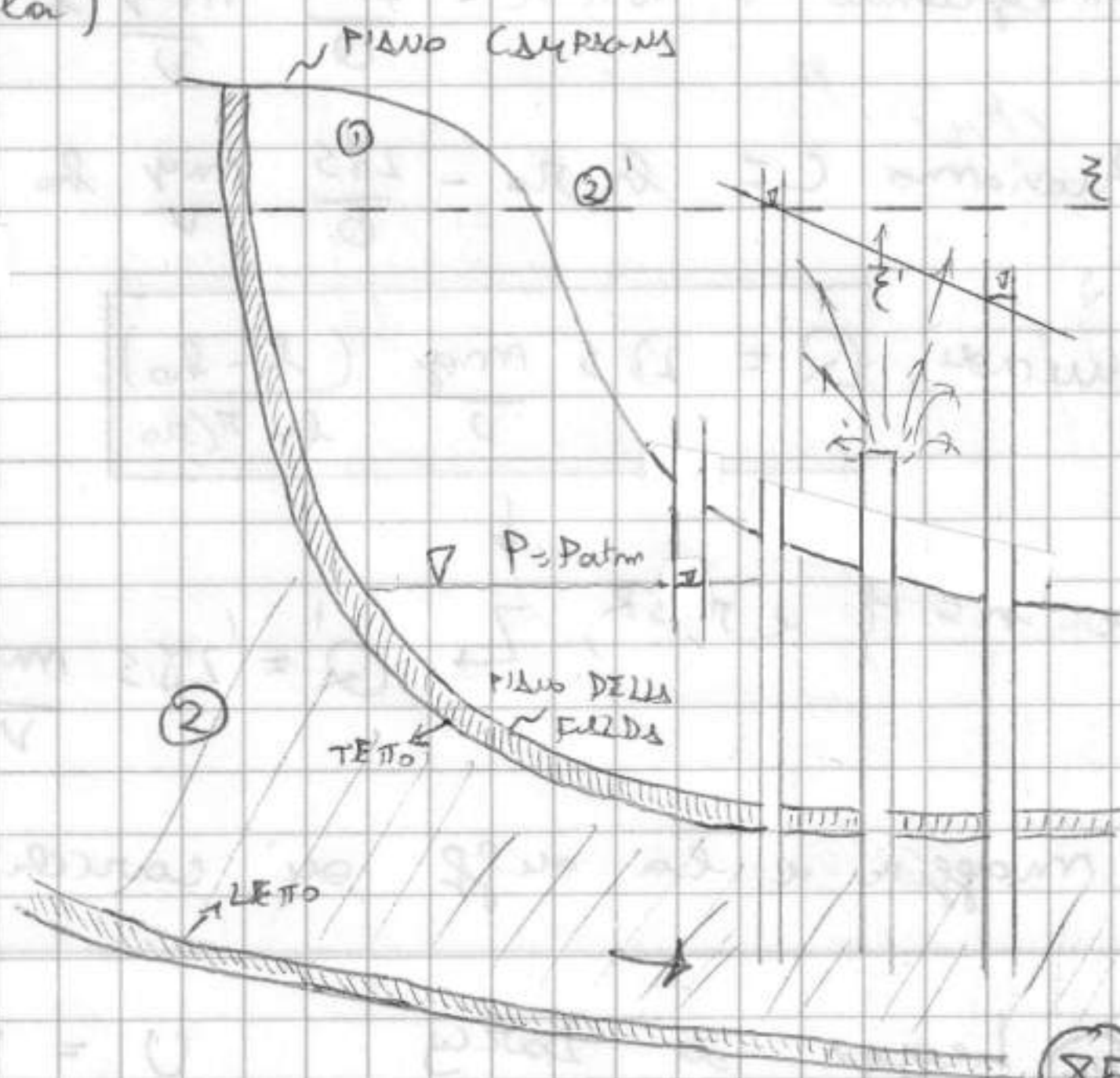
1] Terreno permeabile limitato inf. da terreno impermeabile (ex. \rightarrow v. infiltrazione trasversale
sabbia o ghiaia con sotto argilla)

Rimoviamo M da $Q = \Delta J M$, al
di sopra di certo valore è perm.

C'è un piezometrica al di sotto
della quale i vuoti sono riempiti.


Se ∇ interseca piano campagna c'è
la sorgente. Se caviamo un
pozzo, acqua scende nella
nap. piez.

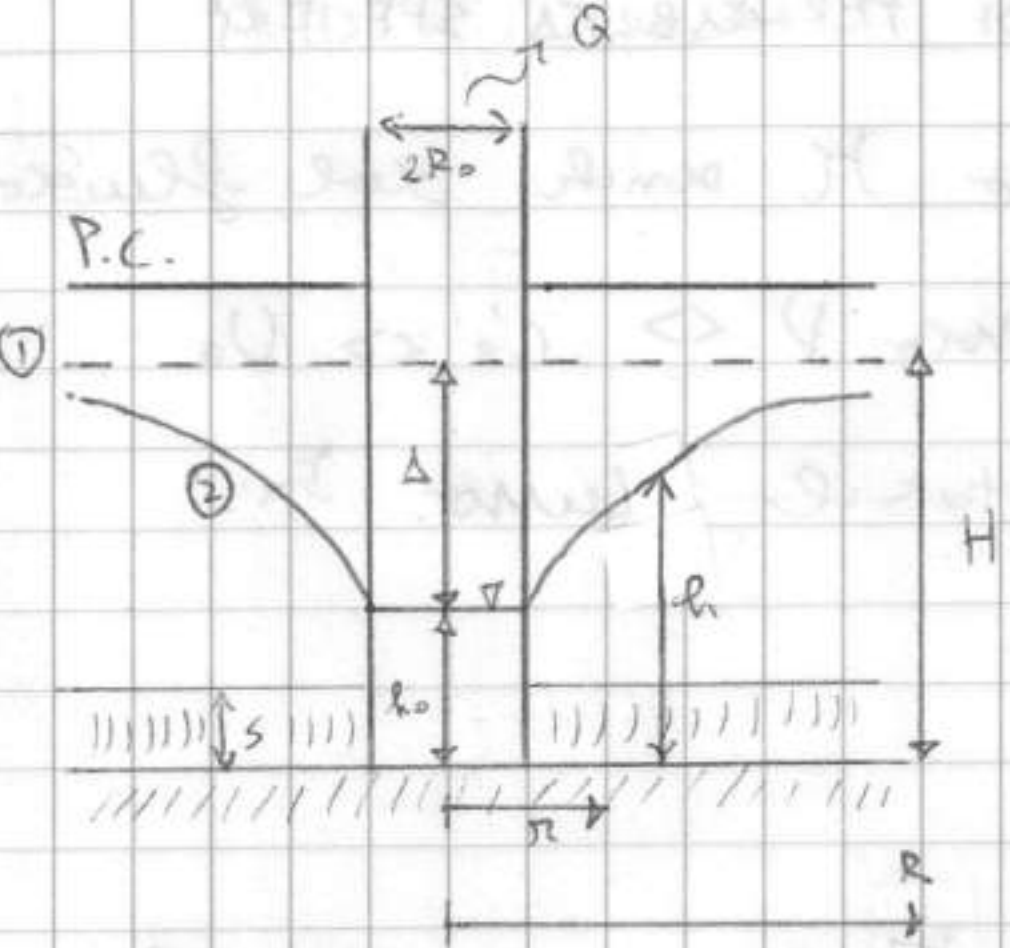
2] Zona di materiale permeabile



limitato inf. e sup. da materiale impermeabile. Se c'è acqua in ② e in pressione, essa può essere ② che è a sup. falda. Se faccio foro fino in fondo, livello si porta fino a ③. Se ho piezometro + escono acqua fanghiglia. Se falda è in movimento c'è dislivello di ③ (con 2 piez. poco capisole)

POZZO IN FALDA ARTESIANA

Cornolotta immersa in falda; trincea è  scavata.



Falda artesiana murata s , pozzo di raggio r_0 . Acqua aspirata con pompa, c'è certa Q . ① = $\begin{cases} \text{prima dell'aspirazione} \\ \rightarrow \text{acqua verso le pareti} \end{cases}$
 Simmetria radiale,
 movimento d'acqua.



Transitorio tra ① e ②

di equilibrio [\rightarrow vicino al pozzo, poi \rightarrow asint. a ①]. h_0 è il pelo libero. $\Delta = H - h_0$. R = dist. da centro del pozzo e

zona impermeabile. Per $r = R \Rightarrow h = H$. (in zona permeabile) + altezza zona di finitura \rightarrow zona a dis. moto

$Q = U_a A = A \pi J = A \frac{mg}{v} J$. Pozzo è finestrato, $A = 2\pi r s$

$\hookrightarrow Q = 2\pi r s \frac{mg}{v} \frac{dh}{dr}$. Separando le variabili $\frac{dr}{r} = \frac{2\pi s}{Q} \frac{mg}{v} dh$

Integrando: $\ln r = \frac{2\pi s}{Q} \frac{mg}{v} h + C$. Sappiamo che per $r = r_0$, $h = h_0$

Ritroviamo $C = h_0 \ln r_0 - \frac{2\pi s}{Q} \frac{mg}{v} h_0 \Rightarrow \ln \frac{r}{r_0} = \frac{2\pi s}{Q} \frac{mg}{v} (h - h_0)$

quindi $Q = 2\pi s \frac{mg}{v} \frac{(h - h_0)}{\ln r/r_0}$

(e + forte la dep. delle caratteristiche del mezzo)

Se $h \approx H$ e $r = R$, $\hookrightarrow Q = 2\pi s \frac{mg}{v} \frac{(H - h_0)}{\ln R/r_0} \Rightarrow Q = 2\pi s \frac{mg}{v} \frac{\Delta}{\ln R/r_0}$

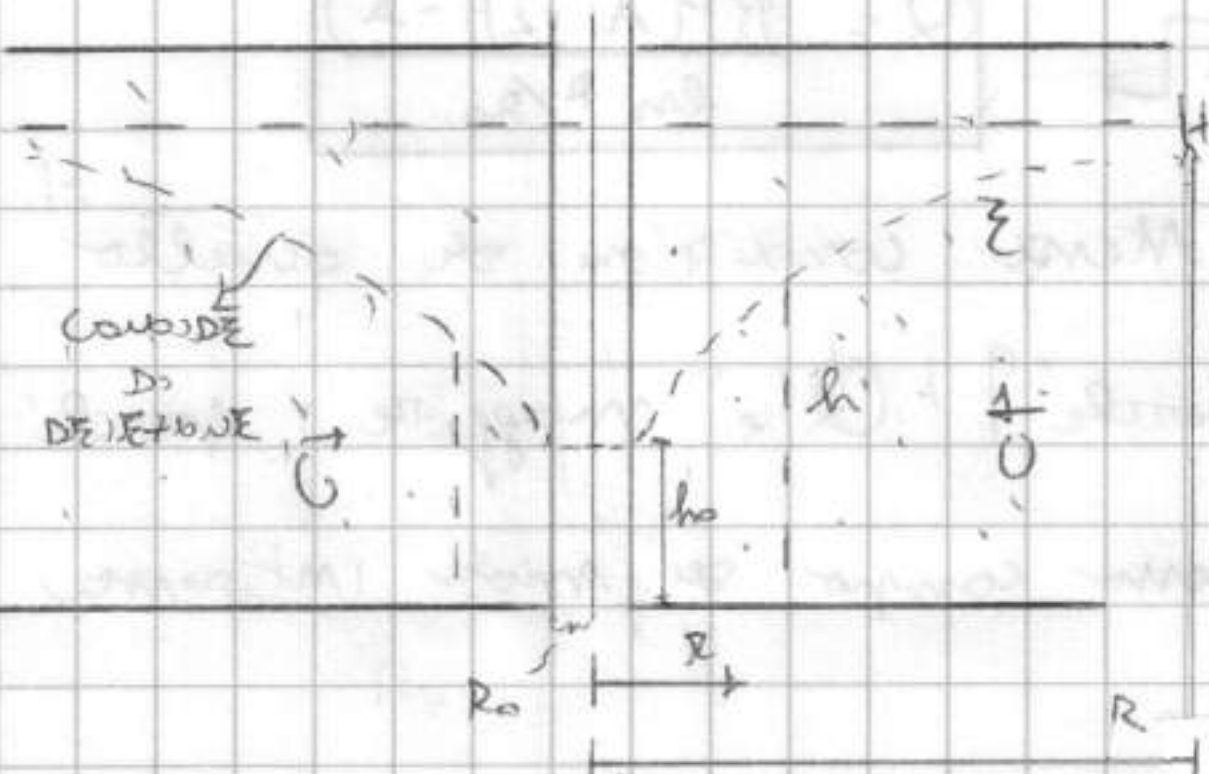
(maggiore è la dep. ai carichi, maggiore è la portata)

$M =$ fattore di permeabilità (dove $M \equiv \frac{mq}{\gamma}$) e $m =$ coefficiente di permeabilità specifica, funzione della porosità microscopica (della natura media porosa)

Moto in falda artesaiana simile a corr. in pressione.

Portata in pozzo artesaiano: $Q = 2\pi S M \frac{\Delta h}{\ln \frac{R}{r_p}}$
 dove Δh = differenza di carico
 $\ln \frac{R}{r_p}$ = logaritmo del rapporto tra raggio di falda e raggio del pozzo

POZZO IN FALDA FREATICA

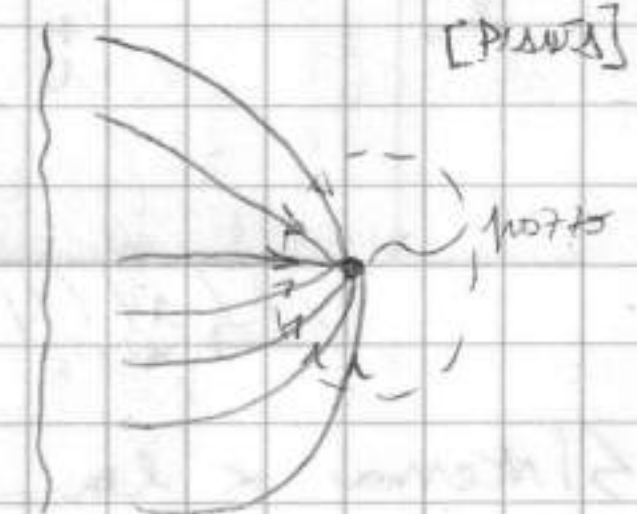
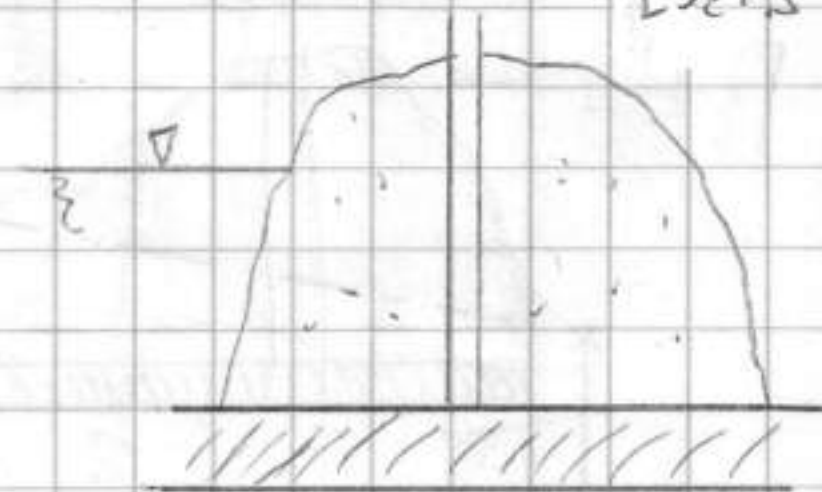


Strato di mezzo poroso a contatto con piano campagna e sotto la torren quasi impermeabile (orizzontale)

Perforiamo con pozzo fino a strato inferiore. c'è carico H [piano piano]

e l'acqua arriverà ad H, molto tempo]. Con pompa ho "h₀" nel pozzo \Rightarrow h₀ Δ nel carico, acqua filtra e ho portata. Sistema assial-simmetrico (supponiamo simmetria radiale).

[ex: lago alimenta falda, come dico che ho simmetria radiale] \rightarrow se mi pongo a R lontano da effetti pozzo e conv. a contorno, ho unq simmetria radiale xke c'è questo andamento corrente]



Sopra certa R individuiamo una superficie

cilindrica di altezza h e lunghezza π \rightarrow interseca il flusso con dimensione che è la stessa superficie di falda. Si mette in moto una \vec{U} , campo di v. apparente con stesso valore a causa simmetria.

$-U = M \frac{\partial h}{\partial r} = -\pi \frac{\partial h}{\partial r}$ $\rightarrow U = M \frac{\partial h}{\partial r}$ Integrando su tutta la sup.

$\int_A U dA = \int_A \pi \frac{\partial h}{\partial r} dA$ ho che $UA = Q = \pi A \frac{\partial h}{\partial r}$; applicando 1,

ho $Q = \pi 2\pi R h \frac{\partial h}{\partial r}$ Integro per separazione di variabili

$$Q \frac{dr}{r} = 2\pi K h dr \rightarrow Q \ln r = 2\pi K \frac{r^2}{2} + C. \text{ Determiniamo } C.$$

Uno la 1^a cond. al contorno: per $R=R_0$, $h=h_0$. Quindi

$$Q \ln R_0 = \pi K h_0^2 + C \Rightarrow C = Q \ln R_0 - \pi K h_0^2. \text{ Sostituiamo nella sol. } h_0$$

$$Q \ln \frac{r}{R_0} = \pi K (h^2 - h_0^2) \rightarrow h \text{ data } \ln R \text{ (sempre costante).}$$

Uno 2^a cond.; per $r=R$ (livello fuori insaturato), $h=H$. Sostituiamo

$$Q = \frac{\pi K (H^2 - h_0^2)}{\ln R / R_0}$$

$$[H^2 - h_0^2 = (H - h_0)(H + h_0) = \Delta(H + h_0 + H - h_0) = \Delta(2H - \Delta)]$$

$$Q = \frac{\pi K \Delta (2H - \Delta)}{\ln R / R_0}$$

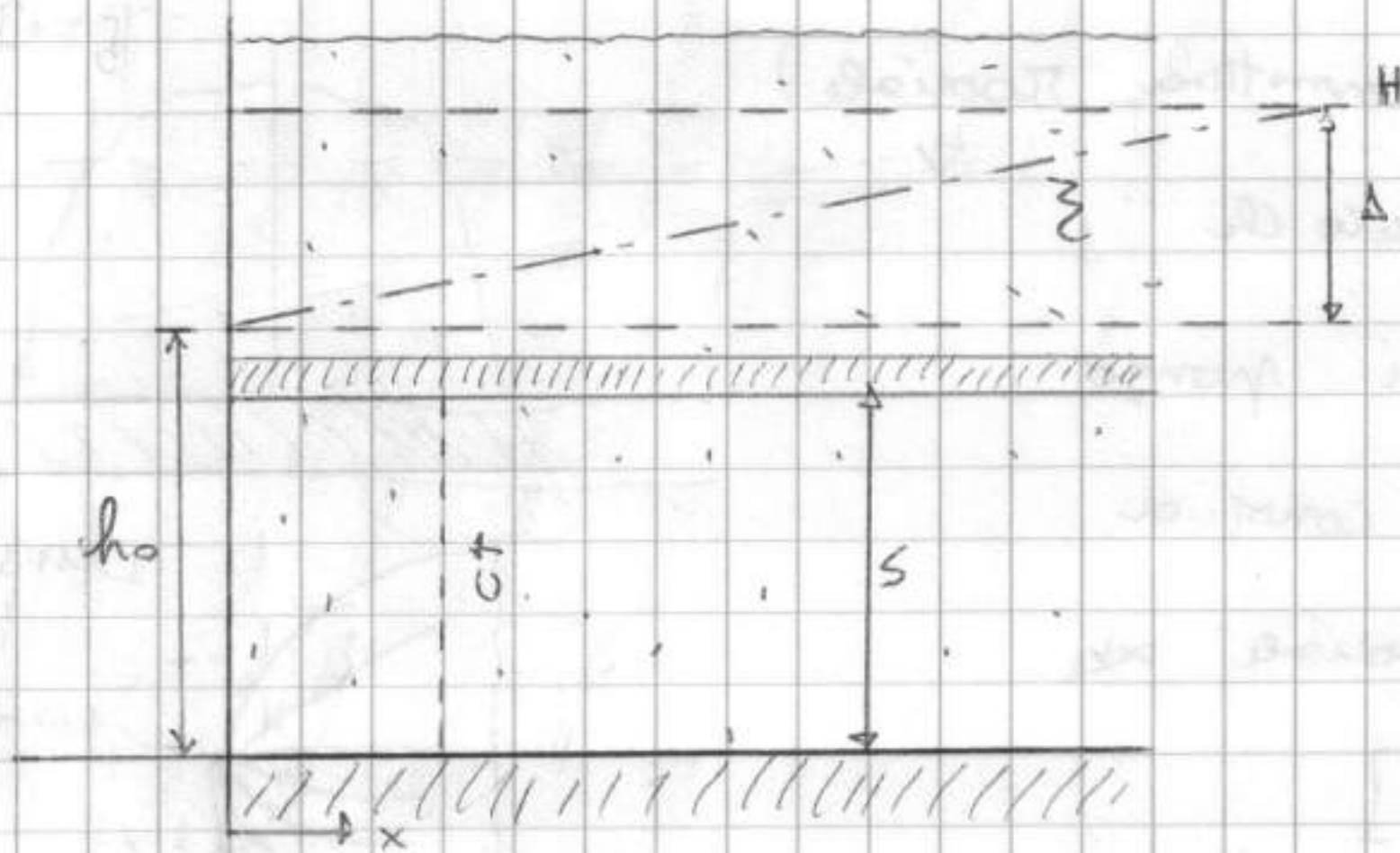
Nel pozzo in falda freatica, con le stesse condizioni di quello artesiano, Q è + che linearmente da Δ . Perché? Q è maggiore perché

A data h falda, prima era costante. Stesso campo di moto intorno

zona permeabile maggiore $[U\Delta]$

H

TRINCEE FILTRANTI



Strato poroso, poi impermeabile ^{per membr. costante} e poi poroso [nello e' impermeabile]. Δ costante.

Se scalo fino in fondo e con pompa abbiamo H a h_0 , h_0 al livello Δ , c'è portata.

Sistema a la bonifica dei terreni paludosi, purificando la zona.

→ trincea di filtrazione. Funzionamento artesiano. Δ acqua tra:

2 str. imp. e' sotto pressione $[\xi > h_0]$. Pres. a simmetria piana

e calcolo a certa distanza x la portata.

$$U = \pi d \xi \frac{dz}{dx}; \text{ int. su } S \text{ [area } = S \text{ (int. di lung. trasversale)]}, \text{ quindi}$$

$$Q = \pi S \cdot \frac{dz}{dx}; \text{ int. x rep. di variabili: } Q dx = \pi S dz \Rightarrow Q x = \pi S z + C$$

Quindi, per $x=0$ e $z=h_0$, $C = -\pi S h_0$.

Quindi $Qx = M S (\xi - h_0)$, variazione lineare di ξ con x , ξ è retta da h_0 a H / Un 2° Cond per portata; per $x=L$, $\xi=H$. Quindi $QL = M S (H - h_0) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{MS \Delta}{L}}$

Supponiamo funt. in solera pratica [mo 1. Moti imperm.]

$\xi = h$. Ripetiamo:

$$U = \pi \frac{dh}{dx} \rightarrow Q = M h \frac{dh}{dx}, \text{ int. e } h_0$$

$$Q dx = \pi h dh = Qx = \frac{M h^2}{2} + C$$

Per $x=0$, $h=h_0$, quindi $C = -\frac{M h_0^2}{2}$. Sostituendo ho la portata

$Qx = \frac{M}{2} (h^2 - h_0^2)$. h non è retta, è curva. Per $x=L$, $h=H$, \rightarrow importante.

$$\boxed{Q = \frac{M}{2} \Delta (2H - \Delta)} \rightarrow \text{"Meno" per il porto.}$$

Nella realtà è difficile avere stratificazioni piane e orizzontali, problema è tridimensionale. Inoltre in una stessa zona posso avere + portati e/o trincee. \rightarrow Legge di Darcy è lineare, quindi vale il principio di sovrapposizione degli effetti, hanno le soluzioni dei singoli problemi.

Ma come si ottiene un modello lineare? Siano note $Q^2 \propto J$ / No! Quando moti è puramente laminare, $La D-W$ - con il disolo V - è lineare ($J \propto U$). Moti di filtrazione, essendo in moti piccoli, è lento e in generale è laminare! \Rightarrow comp. lineare.

H

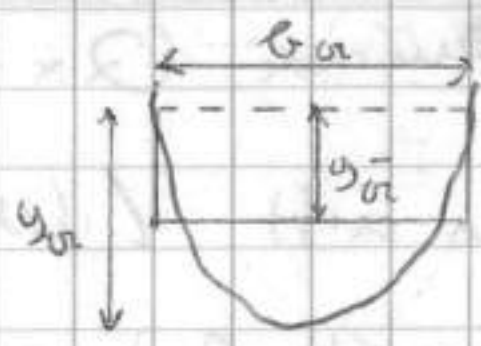
(sta - "classificazione corrente")

$$\frac{A^3}{h} \Big|_{y=y_c} = \frac{Q^2}{g} \quad \text{Pomo det. a priori la natura della corrente}$$

\rightarrow parametro adimensionale, il NUMERO DI FROUD.

Con alveo a sup. libera e defluire portata a y_c .

L'Ec di questa corrente è $\frac{U_{cr}^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gA^2}$ Immobile



in CR, $\frac{1}{\frac{Q^2}{2gA^2}} = \frac{1}{2} \frac{A_{cr}}{b_{cr}} \rightarrow$ altezza critica = $\frac{1}{2} \bar{x}_{cr}$ media

In cond. di deflusso critico $U_{cr} = \sqrt{g y_{cr}}$. Definisco il numero di Froude come:

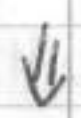
$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g \bar{y}}}$$

[ricordando $U \equiv \frac{Q}{A}$; $\bar{y} \equiv \frac{A}{b}$], parametro

adimensionale di Fr (con come Re di $\frac{Fr}{Fr_c}$). Nel caso di deflusso

critico, "corrente critica", $Fr = 1$ [y=y_{cr}]. Per le "correnti lente", $Fr < 1$, [y > y_{cr}]

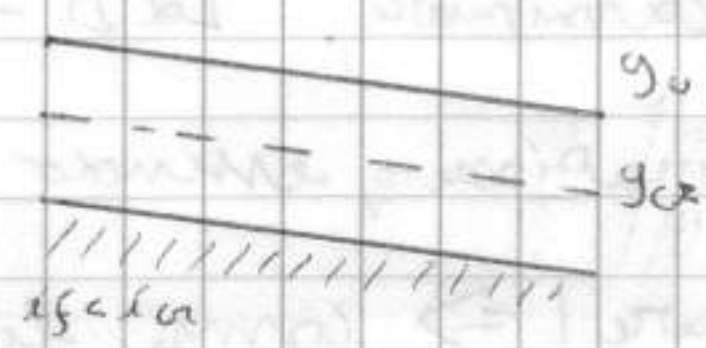
mentre le "correnti veloci", $Fr > 1$ [y < y_{cr}]



Verifichiamo deflusso x moto uniforme. Da Chézy: $Q = A X \sqrt{R i_f}$, quindi $i_f = \frac{Q^2}{A^2 X^2 R} \Big|_{y=y_{cr}}$. Supponiamo che Q defluisca con y che possiamo y₀ e y_{cr}. Quindi definisco la PENDENZA CRITICA (caso limite), y massima minimo en. specifica e moto uniforme \Rightarrow SLUO A PENDENZA GEOMETRICA CRITICA.

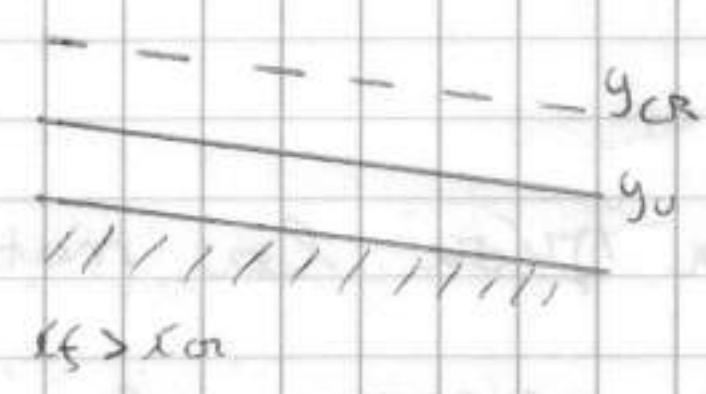
In generale ho certa geometria e portata. Calcolo l'altezza di moto uniforme (y₀); $A^2 X^2 R \Big|_{y=y_0} = \frac{Q^2}{i_f}$. Poi quella critica (y_{cr}) $\frac{A^2}{b} \Big|_{y=y_{cr}} = \frac{Q^2}{g}$ \rightarrow (raro, ma y₀ = y_{cr}). Possa avere:

- y₀ > y_{cr}



Devesi ha i_f < i_{cr}, e' una corrente lenta, ho SLUO A DEBOL PENDING

- y₀ < y_{cr}



Devesi ha i_f > i_{cr}. Quindi ho SLUO A FORTE PENDENZA (corrente veloce)

30) y_{cr} d'ala forma e Q, mentre y₀ d'ala forma, Q e ala pendenza. Camerando solo la pendenza Camera solo y₀.